

Metody konstrukce výnosových křivek

Martin Janeček, Martin Matějka

Tools4F, s.r.o.
www.tools4f.com

Motivace

- Potřeba úrokových měr:
 - diskontování CF -> výpočet hodnoty závazků
 - bezrizikové úrokové míry
 - budoucí podíly na zisku
 - nemusí být bezrizikové
 - vstup do ESG
 - testování tržní ceny fixed-income instrumentů
 - např. IR risk v SII
- Zejména hodnota závazků v ŽP:
 - zásadní a současně velmi citlivá na úrok. míry

**„Správné“ stanovení výnosové křivky
je velmi důležité!**

Cíl

1. Představit některé metody stanovení výnosové křivky
2. Seznámit s analýzou jejich „vhodnosti“ pro využití v pojišťovně
 - risk free
 - podle pravidel SII
 - „vhodnost“ podle námi zvolených kritérií

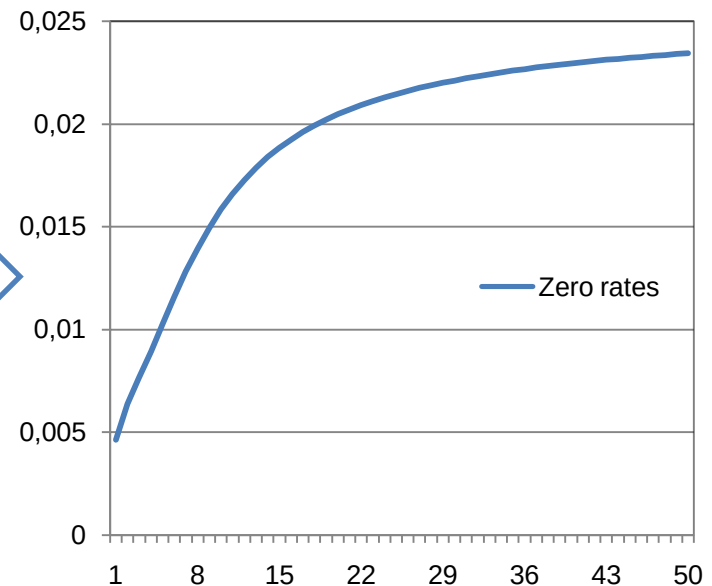
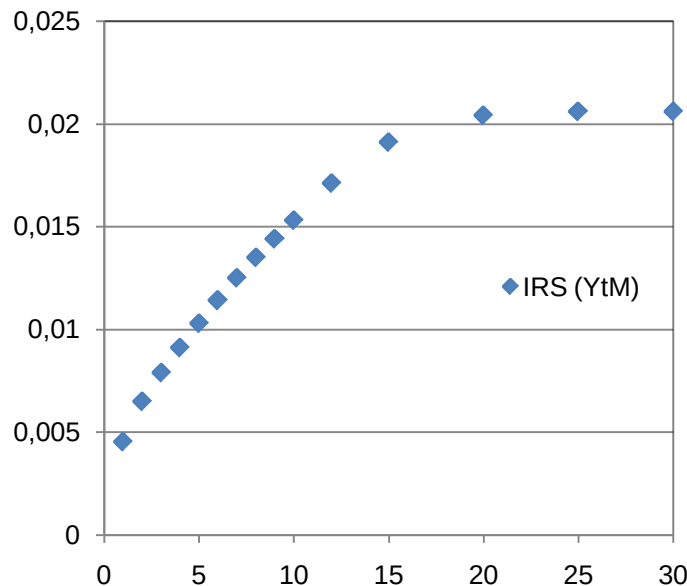
Osnova

1. Základní principy stanovení výnosové křivky
2. Metody konstrukce výnosových křivek:
 - interpolace
 - inter+extrapolace
3. Praktická část
4. Závěr

Základní principy stanovení výnosové křivky

Výchozí situace

- Máme k dispozici tržní data o skupině (podobných) finančních instrumentů (např. IRS, GB apod.)
 - YtM nebo MV (tržní cena)
- Chceme vytvořit výnosovou křivku bezkuponových dluhopisů R_t pro každé $t > 0$.



Obečný postup

- Pro každý instrument i :

- $MV_i = \sum_t \frac{CF_t}{(1+YtM_i)^t}$

- $MV_i^{model} = \sum_t \frac{CF_t}{(1+R_t)^t}$
 $\Rightarrow YtM_i^{model}$

$\Rightarrow$ Máme:

- MV_i a MV_i^{model}
- YtM_i a YtM_i^{model}

Obeční postup (2)

- Postup:

- 1) Vybrat analytické vyjádření $R_t = \text{fce parametrů}$

- 2) Najít parametry R_t tak, aby:

- a) $MV_i \approx MV_i^{model}$ nebo

- b) $YtM_i \approx YtM_i^{model}$

Pro všechna i (všechny instrumenty v portfoliu).

- 3) Optimalizační kritérium:

- např. (vážený) součet čtverců odchylek tržních a modelových dat (MV nebo YtM)

- často potřeba numerického řešení

Rozhodnutí

1. Jaké bude portfolio instrumentů
2. Jaká tržní data budeme „fitovat“
3. Jaké optimalizační kritérium zvolíme
4. Jaký bude zdroj tržních dat
5. Jaké bude analytické vyjádření R_t (model) a podle čeho budeme hodnotit „vhodnost“ volby modelu (kritéria)

Rozhodnutí dnes

Jaké bude portfolio instrumentů

= CZK IRS

- motivováno SII
- doporučeno jako bezrizikový instrument

Jaká tržní data budeme „fitovat“

= YtM

Zdroj dat

- YtM pro CZK IRS
- Tržní informační systém = Bloomberg
- Mid = průměr z ask/bid
- Kontributoři = dle Bloombergu
- Konvence počtu dní = $\text{act}/360$
- Okamžik ve dni = konec dne
- Likvidita!
 - $\Rightarrow \text{LLP} = 15 \text{ let}$
 - $\Rightarrow (0,15)$ interpolace
 - $\Rightarrow 15+$ extrapolace

Kritéria vhodnosti metody

- 1) Shoda modelové YtM (YtM_i^{model}) s tržními daty (YtM_i) $\Rightarrow$ min. optim. krit.
- 2) Rozumná ekonomická interpretace forwardových úrokových měr – co nejméně „hrbů“
- 3) Co nejmenší volatilita současné hodnoty budoucích cash flow v čase – vysvětlitelnost denních/měsíčních změn v PVFCF

Metody

- Viz následující část přednášky

Metody konstrukce výnosových křivek

UFR

- Ultimate Forward Rate
- Úroková sazba, ke které konvergují forwardové úrokové sazby v předem stanovené maturitě
- $UFR = 4,2 \%$ (součet očekávané míry inflace a očekávaného výnosu krátkodobých bezrizikových dluhopisů)
- Speed of convergence 40 let

Metody konstrukce YC

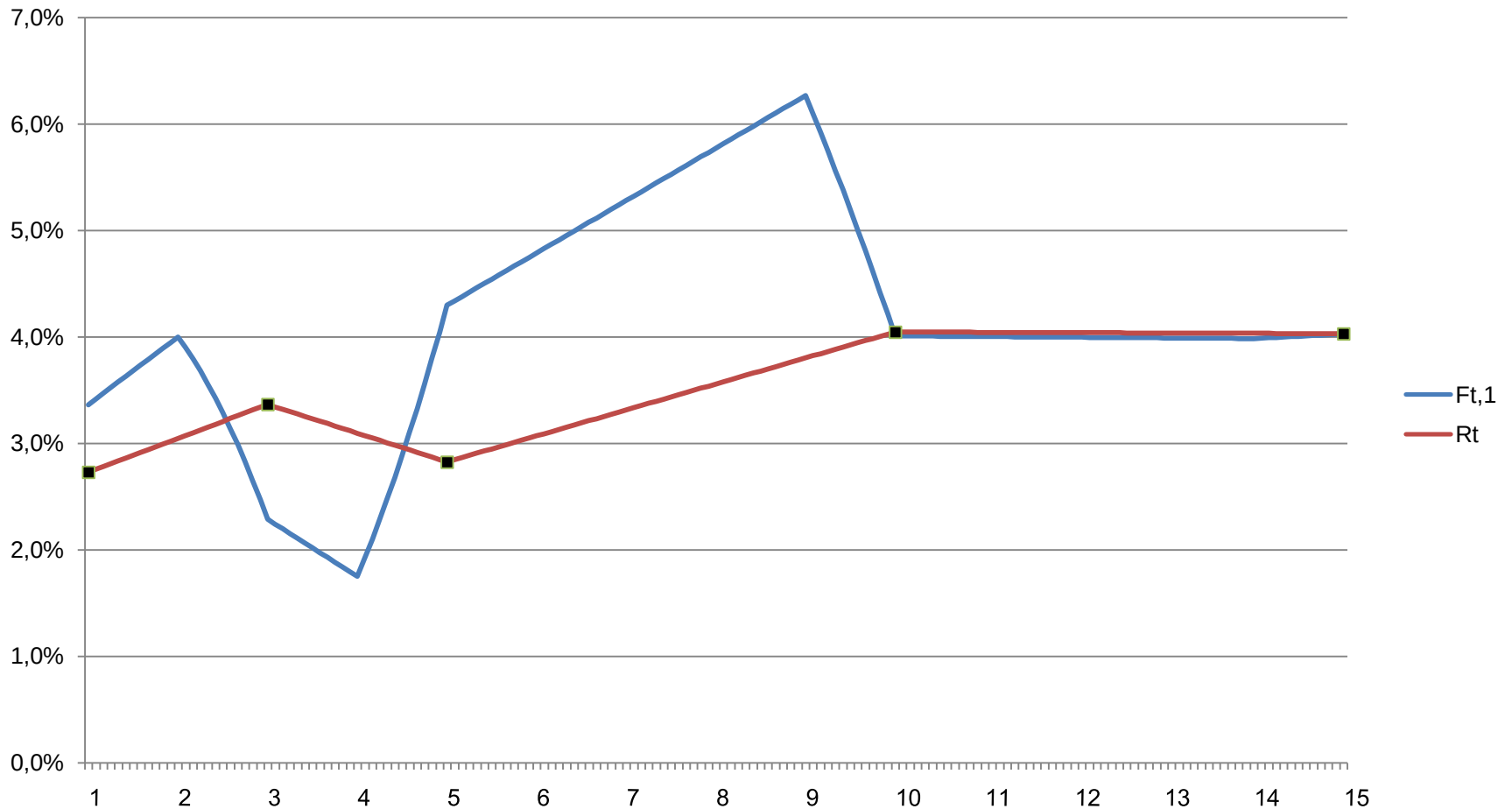
- Interpolace
 - Lineární interpolace (zero, par, forwardových sazeb)
 - Kubické spliny (vyhlazovací funkce)
- Extrapolace + interpolace
 - Kubické spliny + lineární extrapolace
 - Nelson-Siegel
 - Svensson
 - Smith-Wilson
 - Modifikace metod

Lineární interpolace

$$R_t = \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} R_{t_i} + \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} R_{t_{i-1}}$$

- Označení: Zero, FW, par
- Získání diskontních faktorů
 - Bootstrapping, geometrický průměr FW
- Výhody
 - Jednoduchá metoda
- Nevýhody
 - Skoky ve forwardových sazbách

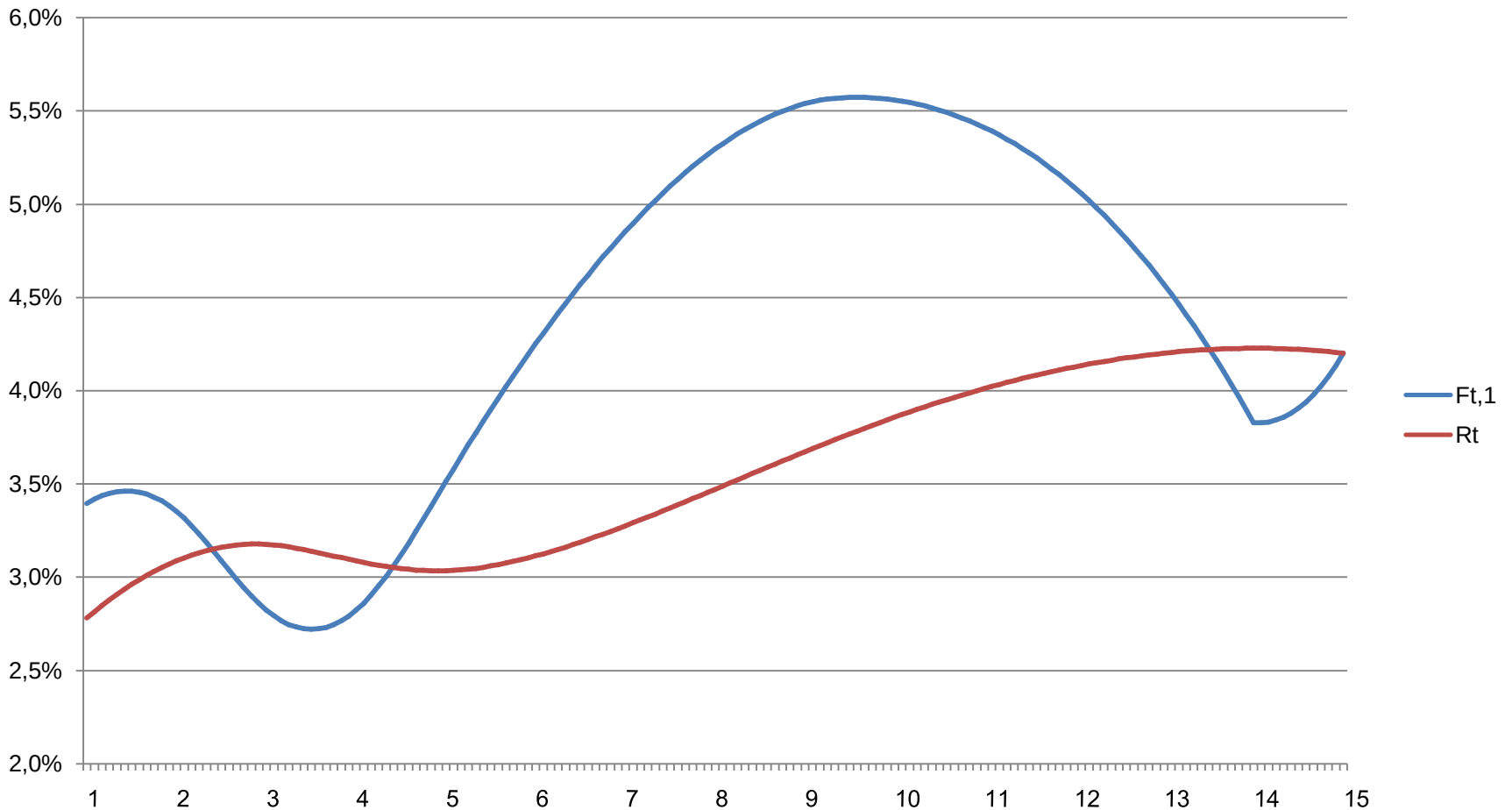
Lineární interpolace



Kubické spliny (CS)

- Po částech polynomiální funkce 3. řádu
$$DF(t) = a_i + b_i \cdot (t - t_i) + c_i \cdot (t - t_i)^2 + d_i \cdot (t - t_i)^3, t_i \leq t \leq t_{i+1}$$
uzly $t_i, 1 \leq i \leq n-1$
- Omezující podmínky
- Výhody
 - Přesnější shoda s tržními daty
- Nevýhody
 - „Hrbaté“ forwardové sazby
 - Citlivost na volbu uzlů a na změny v tržních datech

Kubické spliny (CS) – „hrbatost“



Vyhlazené kubické spliny (CS_SM)

- Optimalizační kritérium + penalizační část

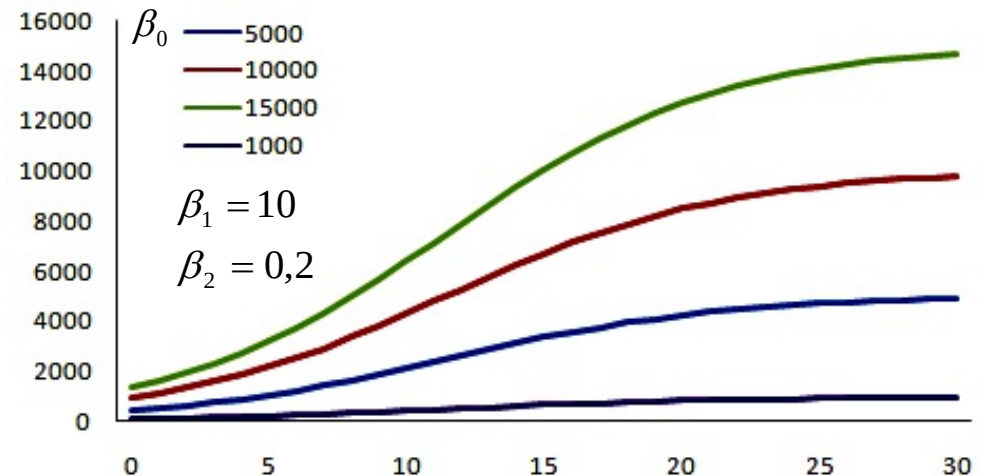
$$\int_0^{LLP} \lambda(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} DF(t, \theta) \right)^2 dt$$

- Hladící parametr

Konstanta λ

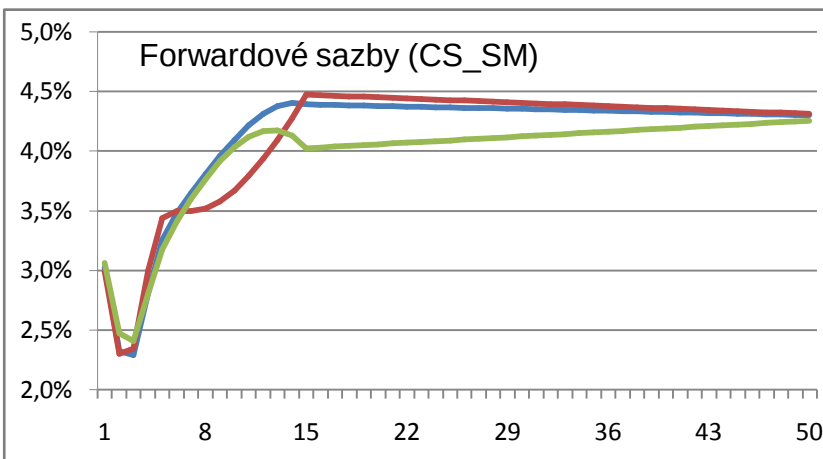
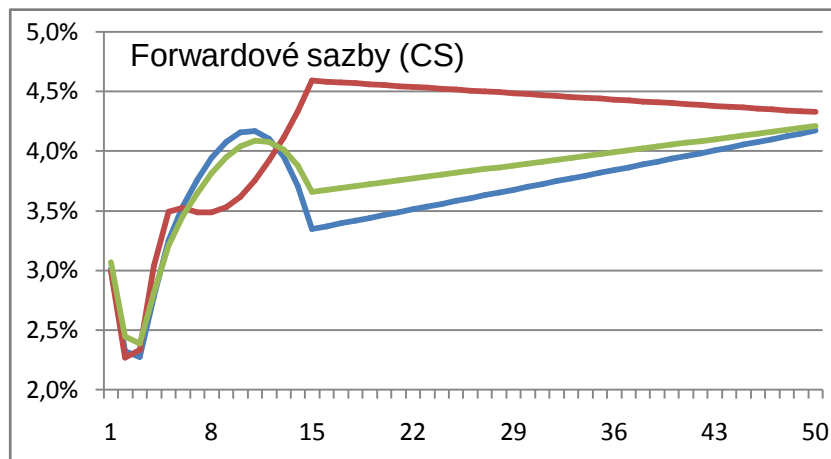
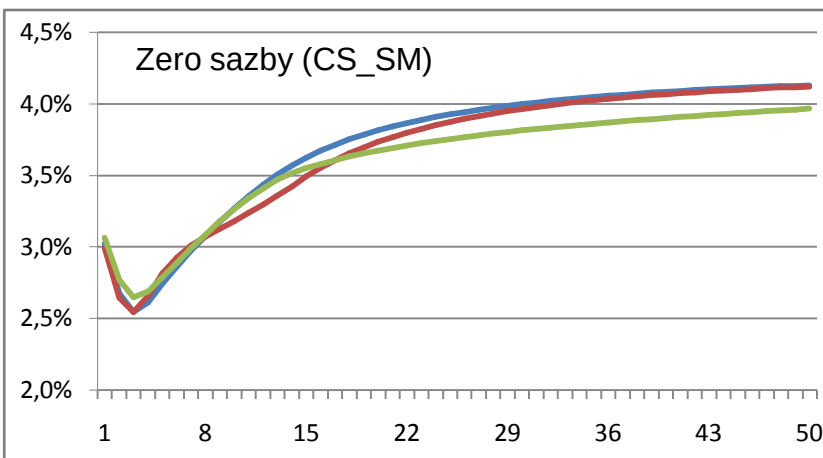
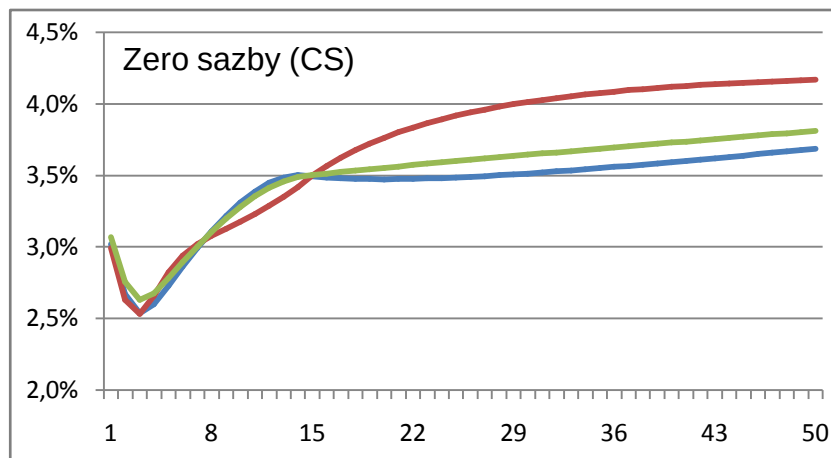
Dynamický $\lambda(t) = \frac{\beta_0}{1 + \beta_1 e^{-\beta_2 t}}$

Zdroj: Bolder, Gusba. Exponentials, Polynomials, and Fourier Series



Metody interpolace + extrapolace

Kubické spliny + lineární extrapolace



— 30.12.2008 — 31.12.2008 — 1.1.2009

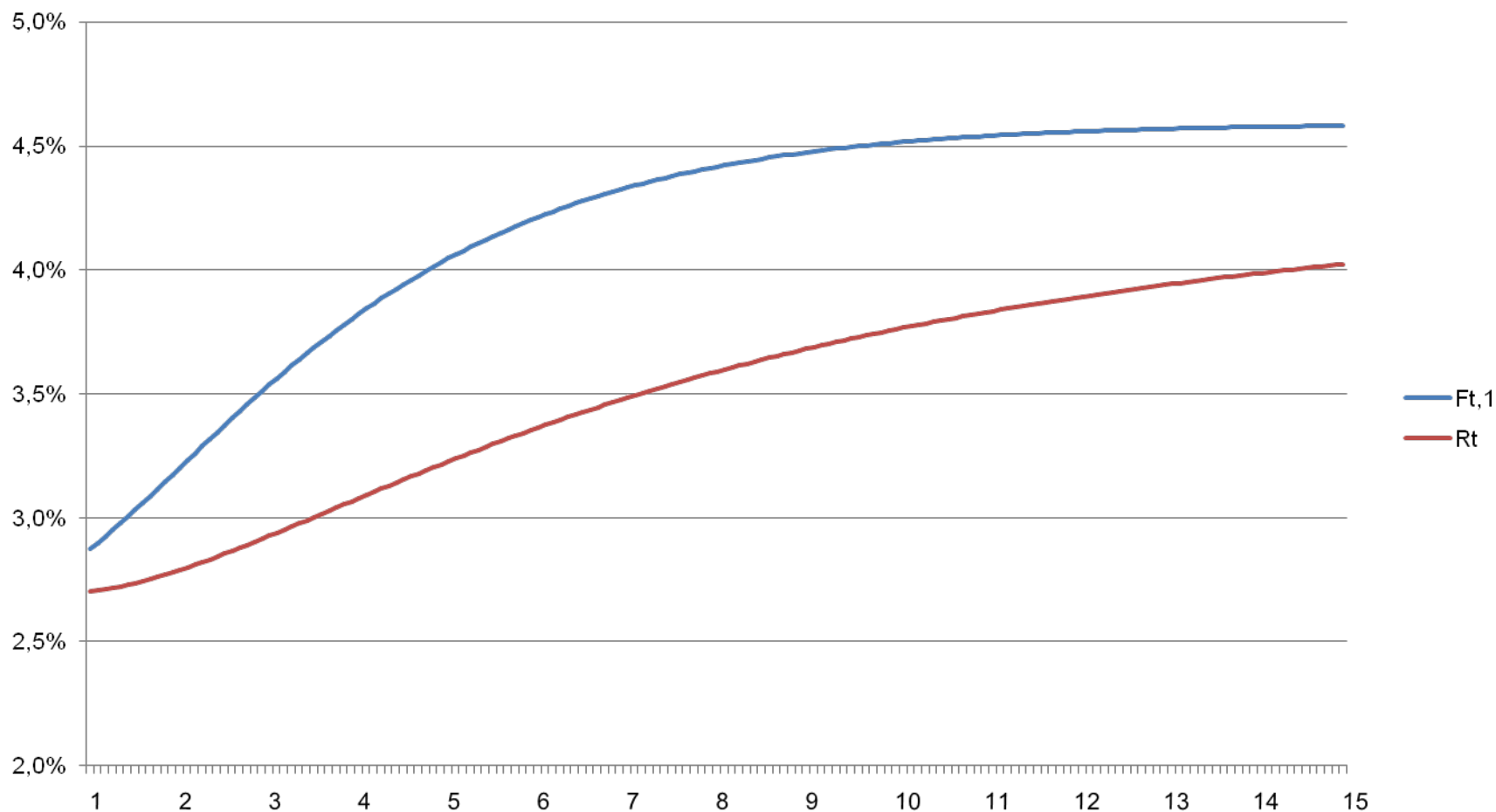
Nelson-Siegel (NS)

$$R_t = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \cdot [1 - \exp(-t / \gamma)] / (t / \gamma) - \beta_2 \cdot \exp(-t / \gamma)$$

Zdroj: Nelson, Siegel. Parsimonious
Modeling of Yield Curves

- Výhody
 - Interpretace parametrů
 - „Nehrbaté“ forwardové sazby
- Nevýhody
 - Náročnost při odhadu parametrů
 - Nedostatečná shoda s tržními daty
 - Korelace mezi komponentami

Nelson-Siegel (NS)



Svensson (NSS)

$$+ \beta_3 \cdot \left[(1 - \exp(-t / \gamma_2)) / (t / \gamma_2) - \exp(-t / \gamma_2) \right]$$

- Výhody

Zdroj: Svensson. Estimating and interpreting forward interest rates

- Zvýšená flexibilita z hlediska tvaru

- Nevýhody

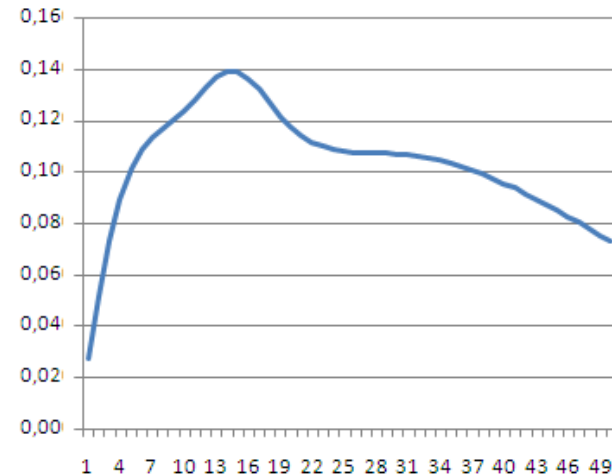
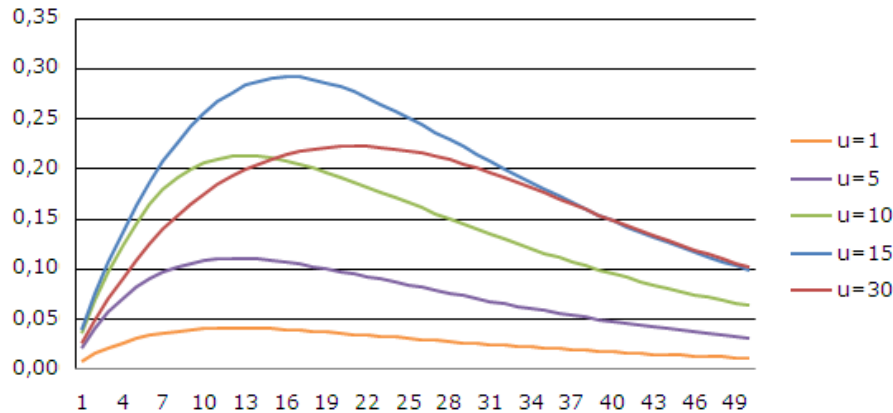
- Náročnost při odhadu parametrů jako u NS
 - Přidání hrbu neposkytuje významnější zlepšení při shodě s tržními daty CZK IRS

Smith-Wilson (S-W)

- Značení
 - m_i je cena i -tého fin. Instrumentu ($i = 1, \dots, N$)
 - $c_{i,j}$ je cash flow instrumentu i v čase u_j ($j = 1, \dots, J$)
 - $P(t)$ je diskontní faktor v čase t
 - $P(0) = 1$
 - $P(t)$ je hladká funkce t
 - $P(t)$ je kladná a klesající funkce
 - $P(t)$ pro velké t exponenciálně klesá k nule

$$m_i = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot P(u_j)$$

Smith-Wilson (S-W)



Tržní data,
UFR, α

$$W(t, u_j) = e^{-UFR \cdot (t+u_j)} \cdot \left\{ \alpha \cdot \min(t, u_j) - 0.5 \cdot e^{-\alpha \cdot \max(t, u_j)} \cdot (e^{\alpha \cdot \min(t, u_j)} - e^{-\alpha \cdot \min(t, u_j)}) \right\}$$

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot W(t, u_j)$$

$$P(t) = e^{-UFR \cdot t} + \sum_{i=1}^N \zeta_i \cdot K_i(t)$$

$$m_i = \sum_{j=1}^J c_{i,j} \cdot P(u_j)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{C}\boldsymbol{\mu} + (\mathbf{C}\mathbf{W}\mathbf{C}^T)\boldsymbol{\zeta}$$

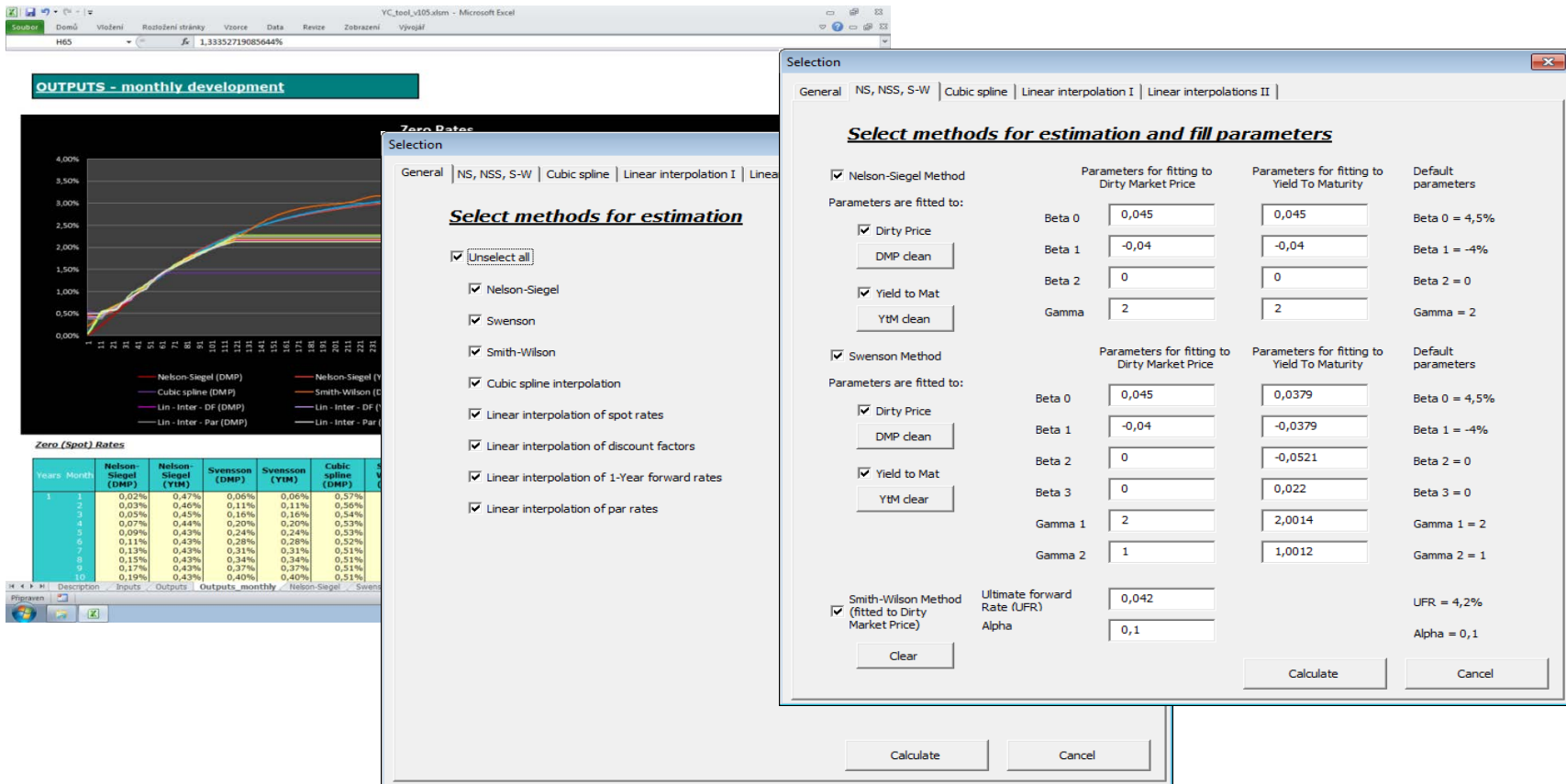
Smith-Wilson (S-W)

- Výhody
 - Dva vstupní parametry (α , UFR)
 - Změna α , aby speed of convergence = 40 let
 - Analytické řešení
 - Flexibilní (dokáže přesně fitovat tržní hodnoty)
- Nevýhody
 - „Hrbaté“ forwardové sazby
 - Citlivost na změny v tržních datech

Praktická část

Yield Curve Fitting

Zdroj: www.tools4f.com



Hodnotící kritéria metod

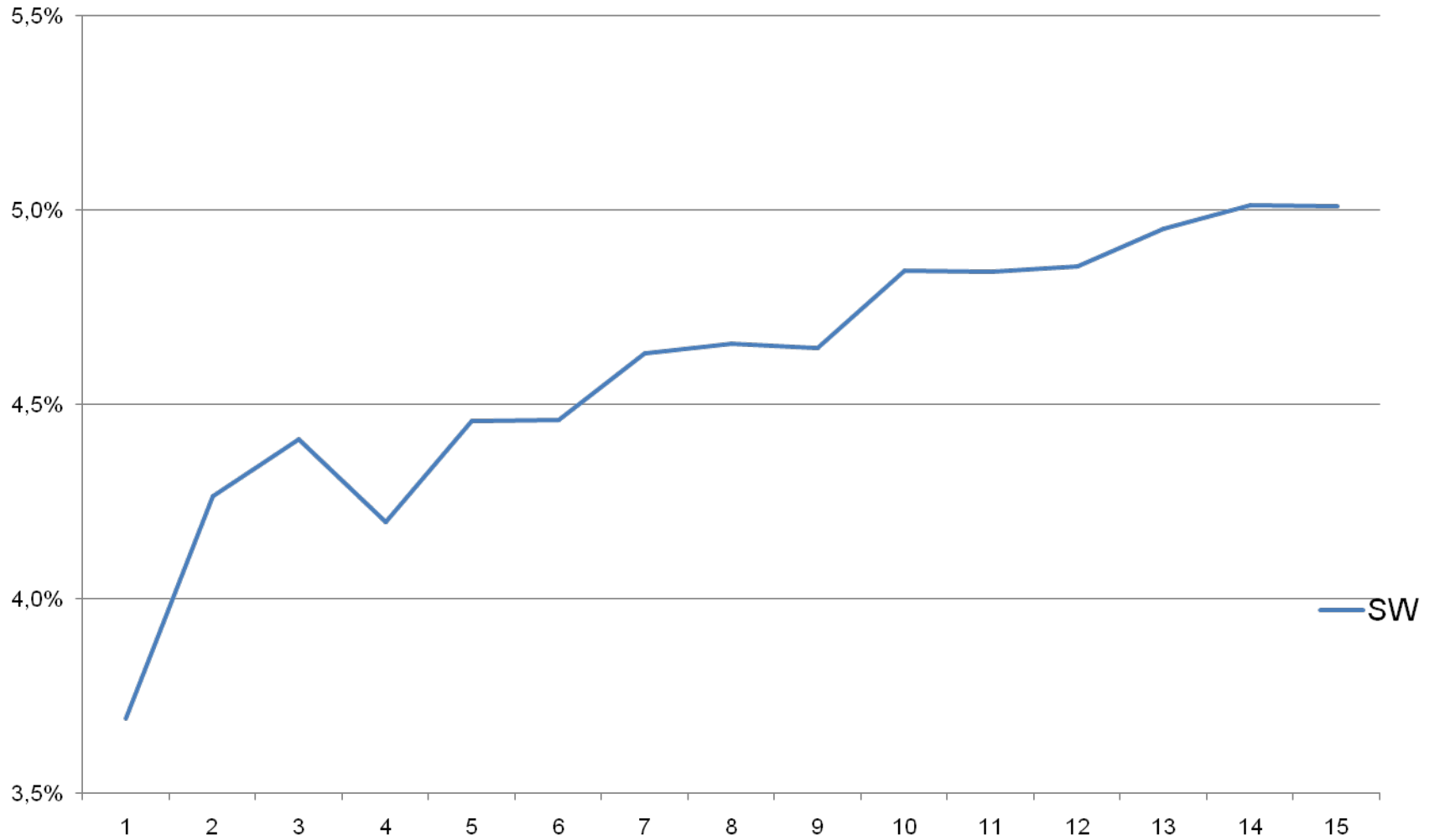
- 1) Stabilita forwardových sazeb (FWR)
 - počet „hrbů“ forwardových sazeb
- 2) Volatilita současné hodnoty budoucích cash flow (PVFCF)
 - budoucí 1 CZK v 50 letech
- 3) Přesnost shody s tržními daty (FIT)
 - hodnota optimalizačního kritéria pro YtM

1) FWR – interpolační

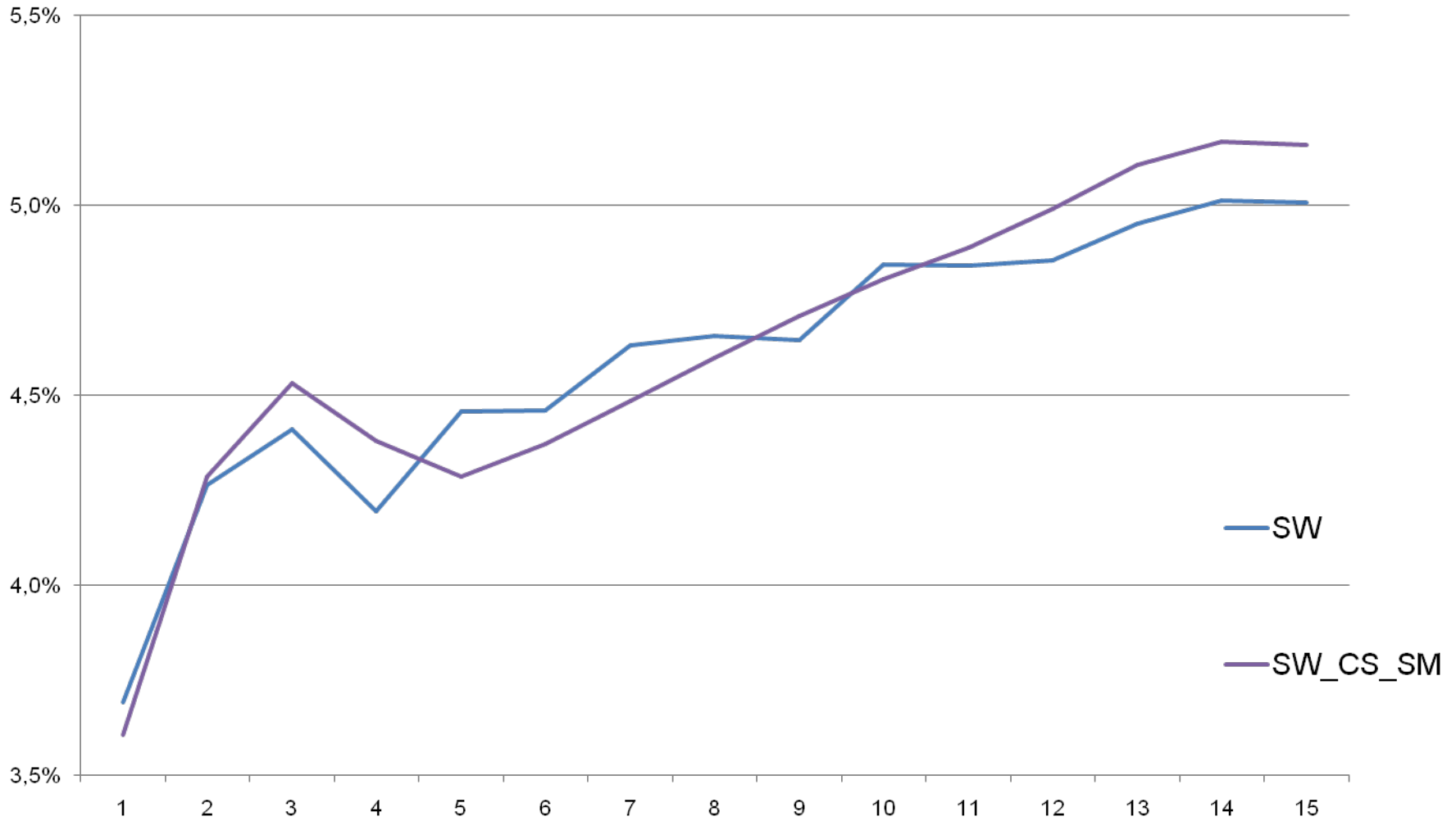
0-15	NS	NSS	S-W	S-W_ CS	S-W_ CS_SM	CS	CS_SM	zero	par	fw
max	1	2	9	8	4	4	3	6	6	5
prům	0,25	0,28	2,66	1,12	0,4	1,42	0,45	3,52	3,47	3,02
var	0,19	0,23	2,92	1,16	0,55	0,56	0,53	1,05	1,49	1,10
výsledek	1	2	9	7,3	3,6	5	3,3	7,6	8,3	7

- Nejlepší: Nelson–Siegel, Svensson, kubické spliny vyhlazené
- Nejhorší: Lineární interpolační, S-W
- Možné vylepšení metody SW pomocí vyhlazených kubických splinů

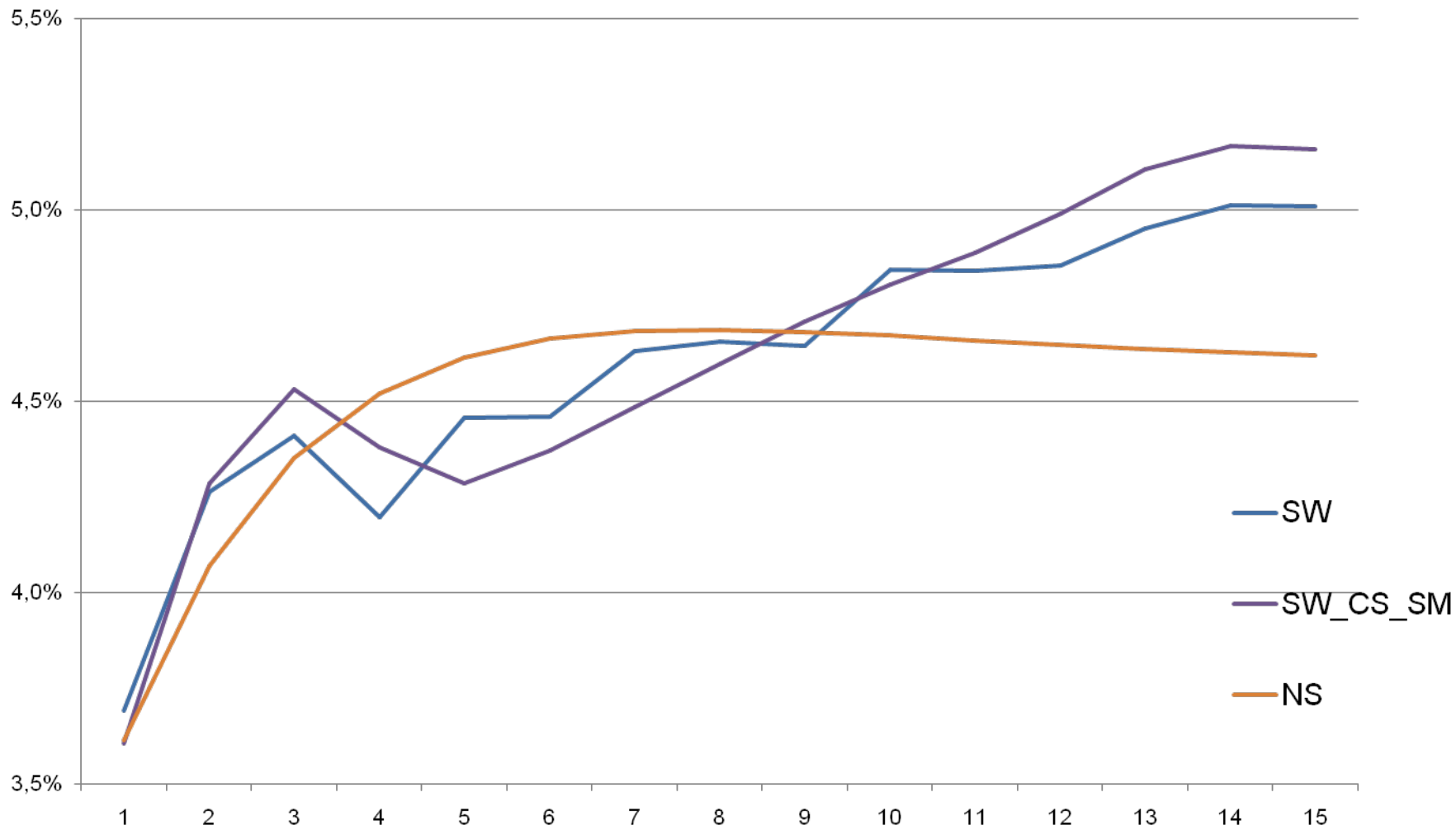
1) FWR - interpolate



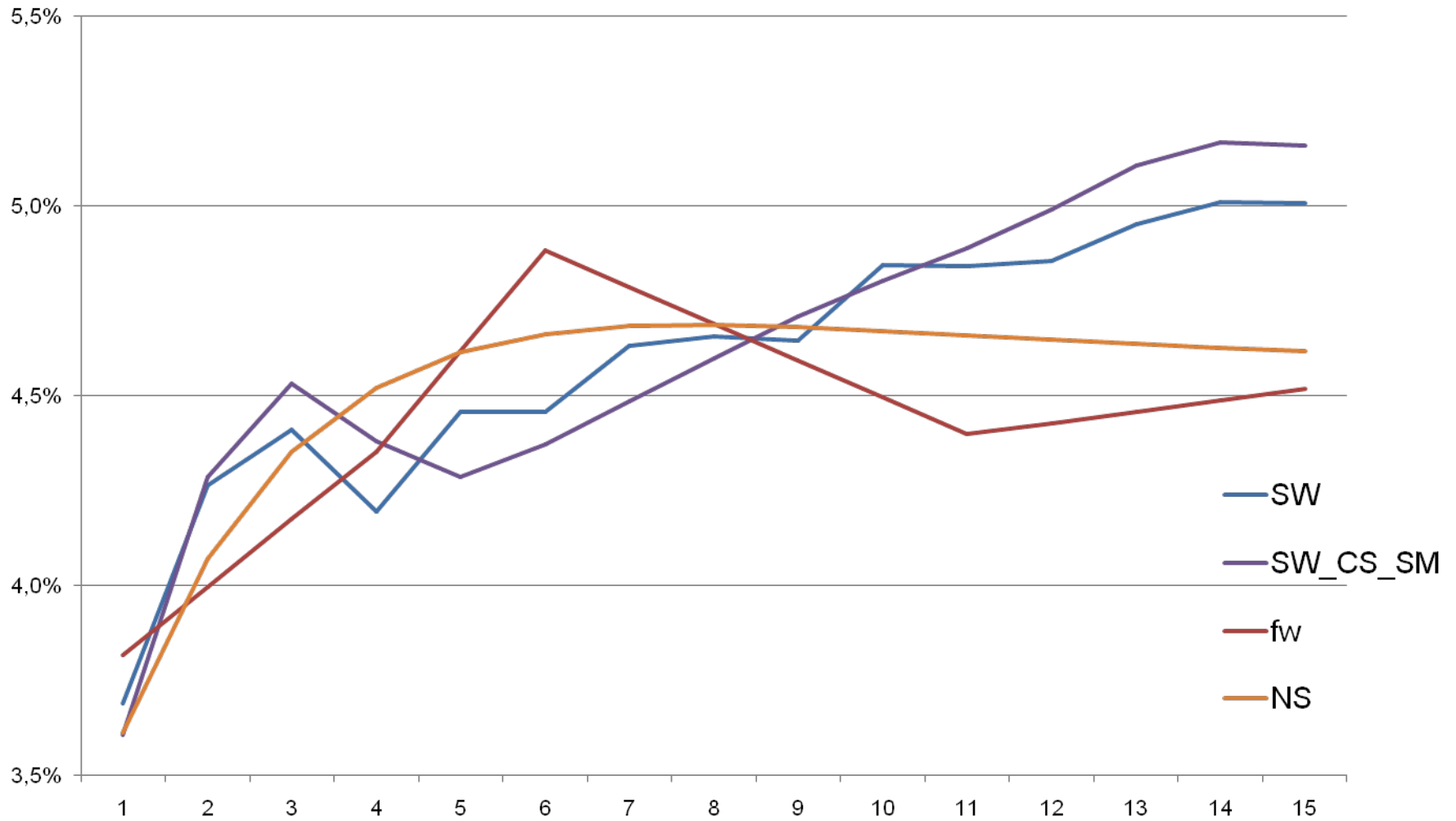
1) FWR - interpolate



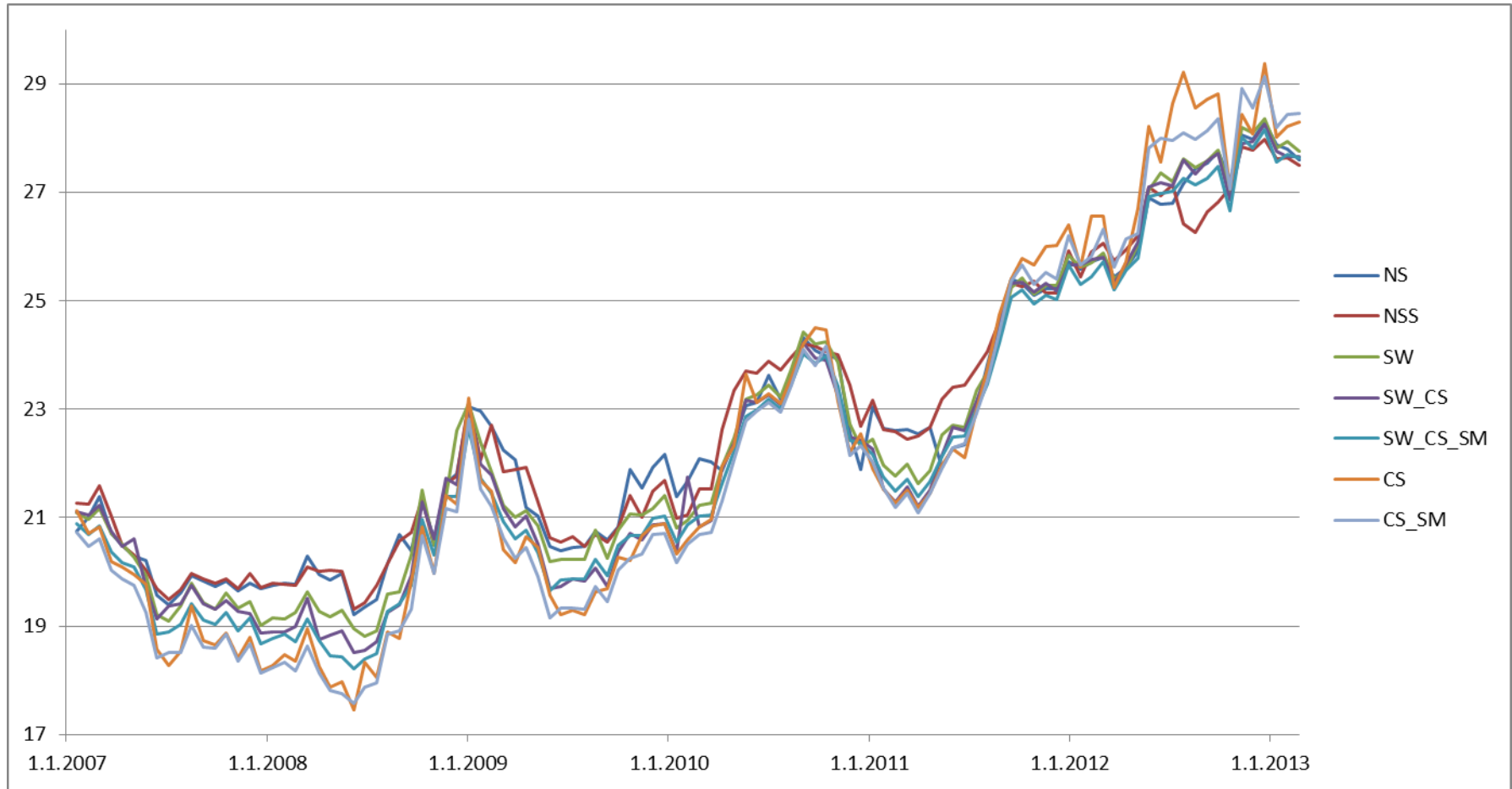
1) FWR - interpolate



1) FWR - interpolate



2) Volatilita PVFCF (0-50)

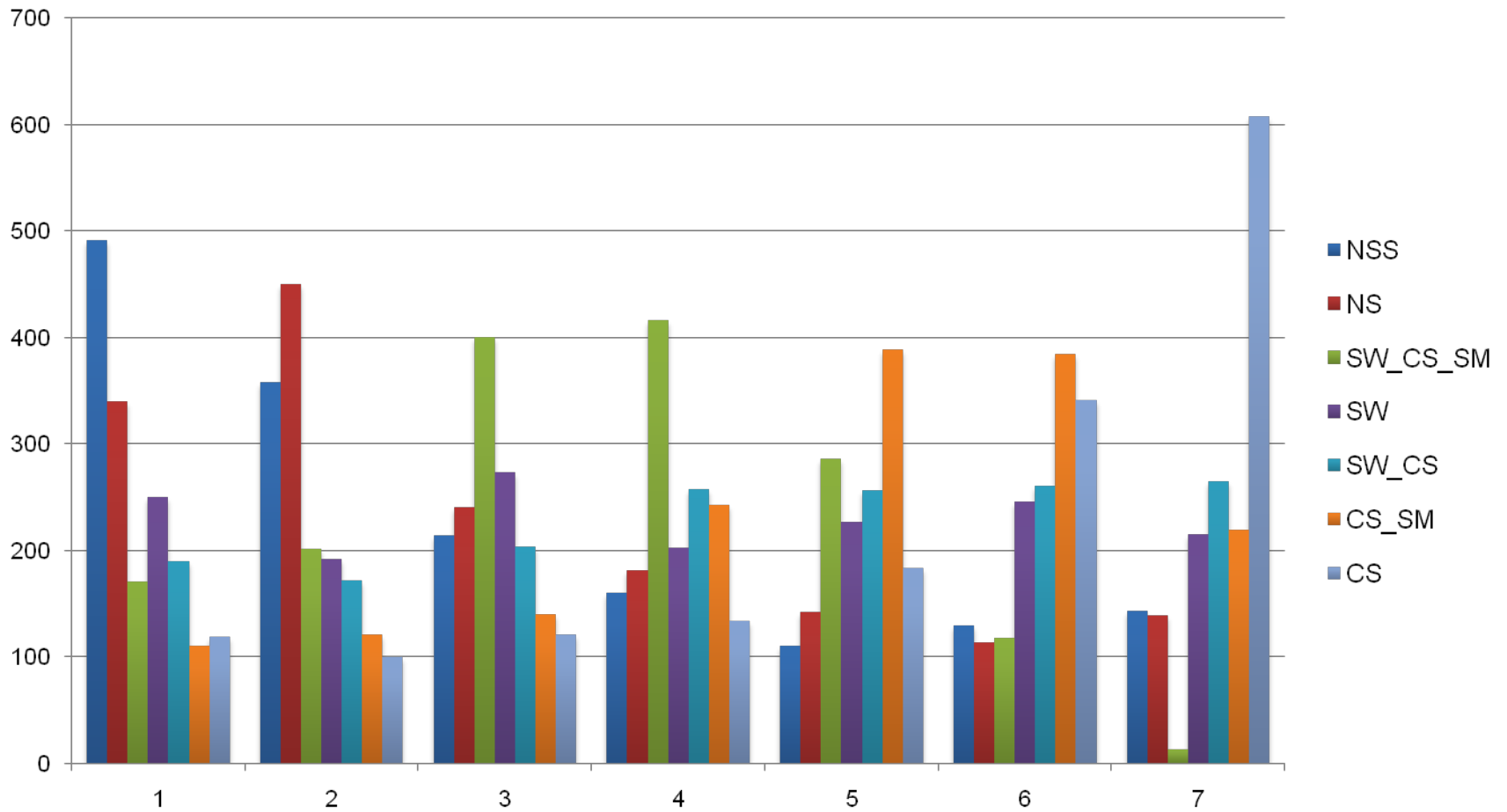


2) Volatilita PVFCF (0-50)

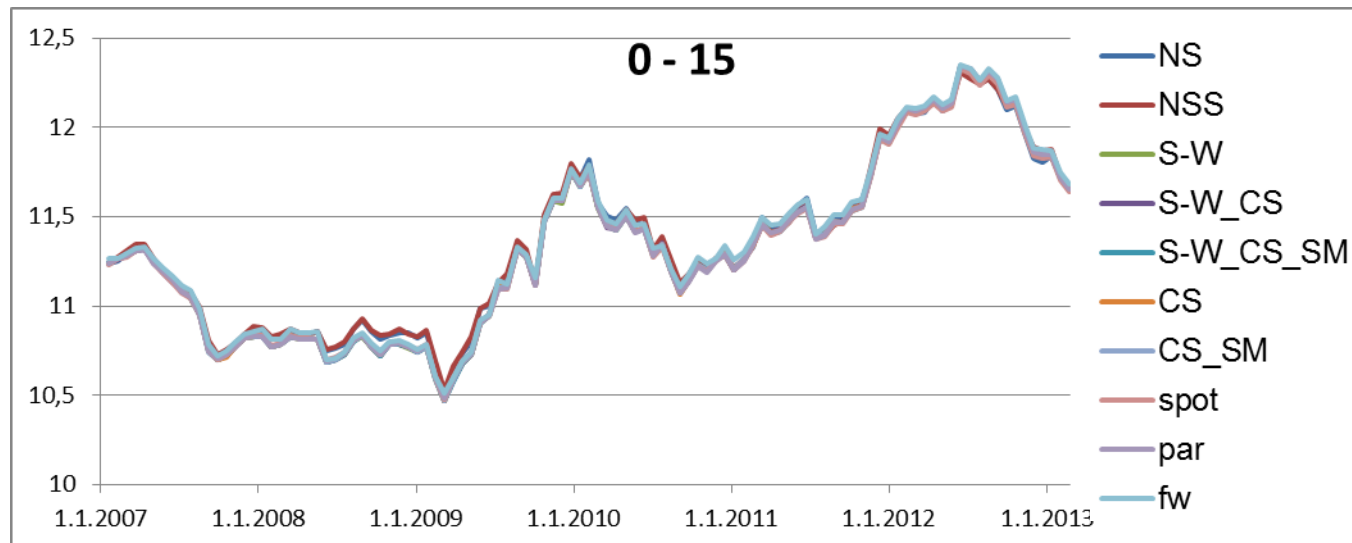
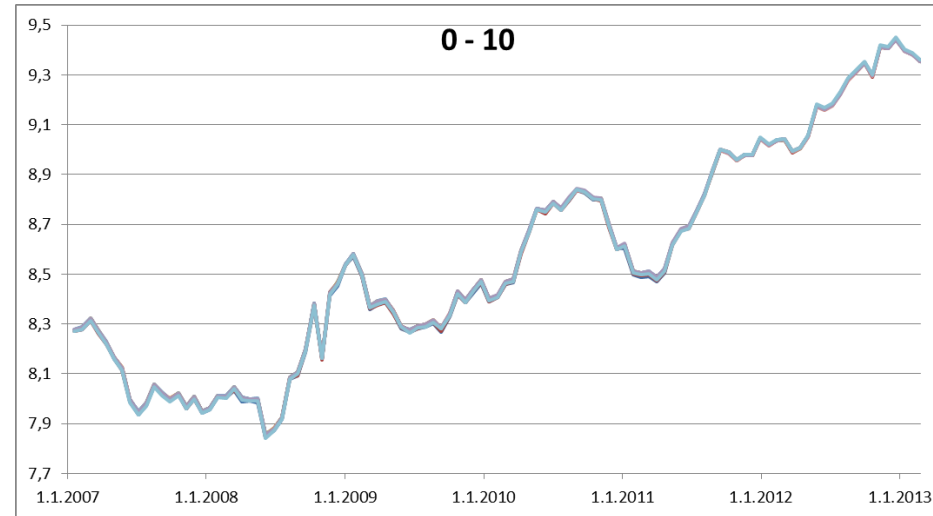
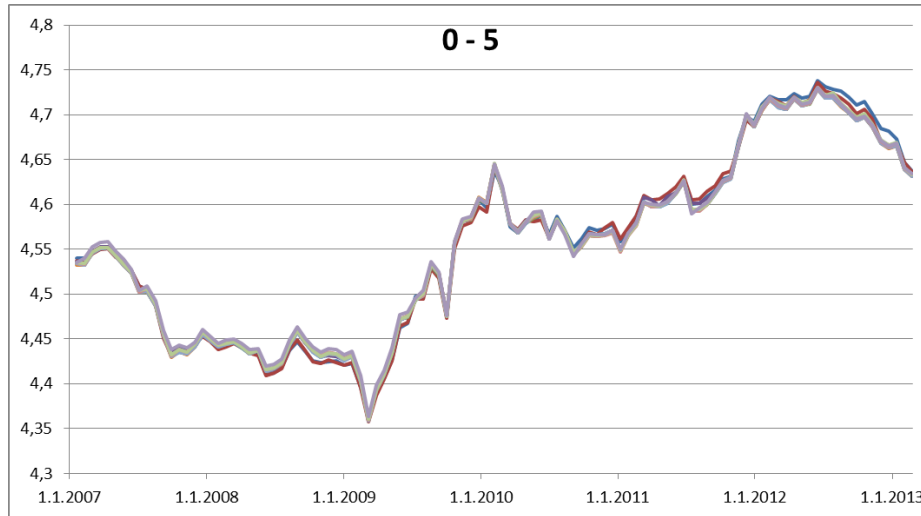
0 - 50	NS	NSS	S-W	S-W_CS	S-W_CS_SM	CS	CS_SM
max	1,323	1,624	1,492	1,851	0,886	2,636	2,182
průměr	0,103	0,108	0,144	0,186	0,127	0,265	0,181
rozptyl	0,018	0,027	0,025	0,043	0,015	0,087	0,036
pořadí	2	1	4	5	3	7	6
výsledek	1,75	2,75	3,5	5,5	2	7	5,5

- Nejlepší: Nelson-Siegel, Smith-Wilson (kubické spliny vyhlazené), Svensson
- Nejhorší: Kubické spliny s lineární extrapolací

2) Volatilita PVFCF (0-50)



2) Volatilita PVFCF (dílčí části)

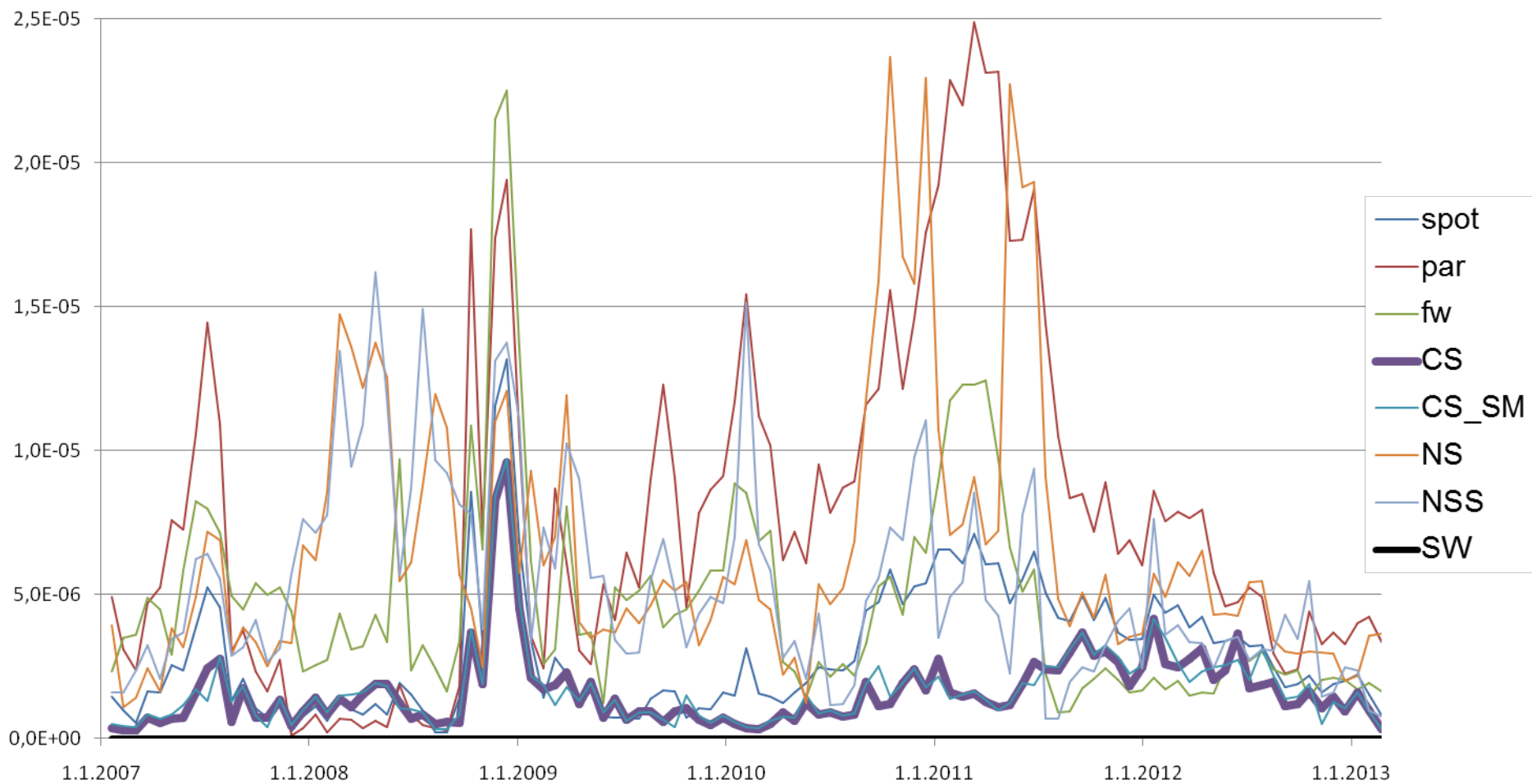


3) Fit (0-15)

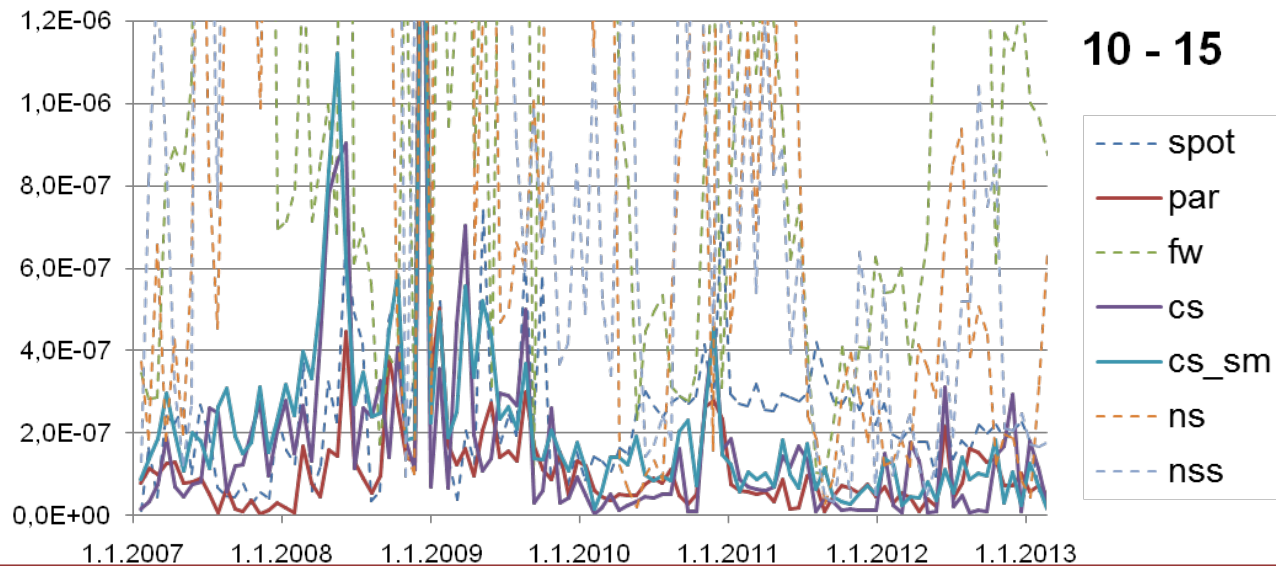
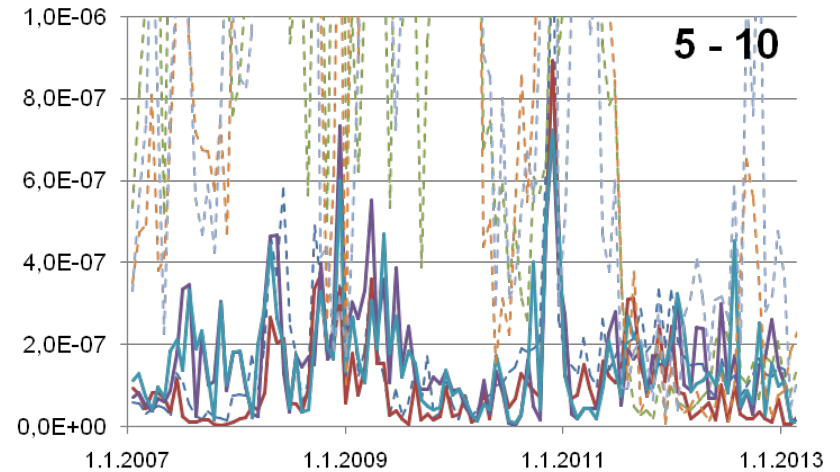
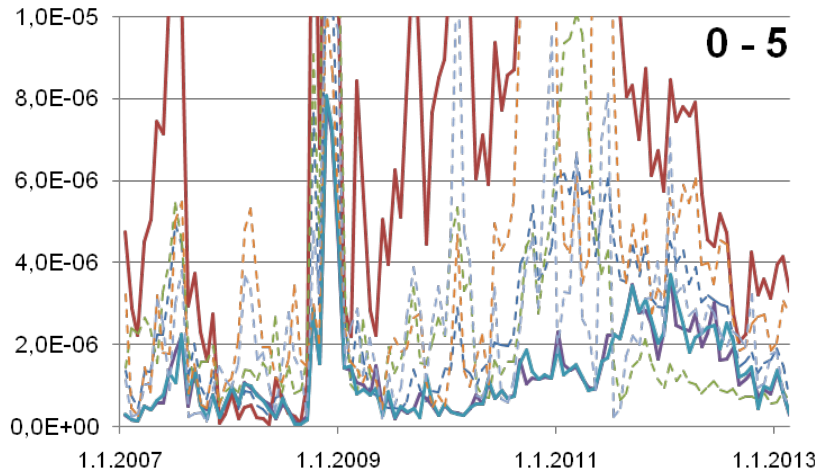
0-15	zero	par	fw	CS	CS_SM	NS	NSS
max	2,73E-05	3,37E-05	3,84E-05	1,85E-05	1,85E-05	3,14E-05	3,27E-05
rozptyl	6,56E-12	3,75E-11	1,81E-11	2,42E-12	2,43E-12	2,75E-11	1,55E-11
průměr	3,08E-06	7,89E-06	4,88E-06	1,70E-06	1,74E-06	6,95E-06	5,54E-06
pořadí	3	7	4	1	2	6	5
výsledek	3	6,75	5	1	2	5,5	4,75

- Nejlepší: SW, Cubic spline, případně shlazené
- Nejhorší: Lineární interpolace par sazeb

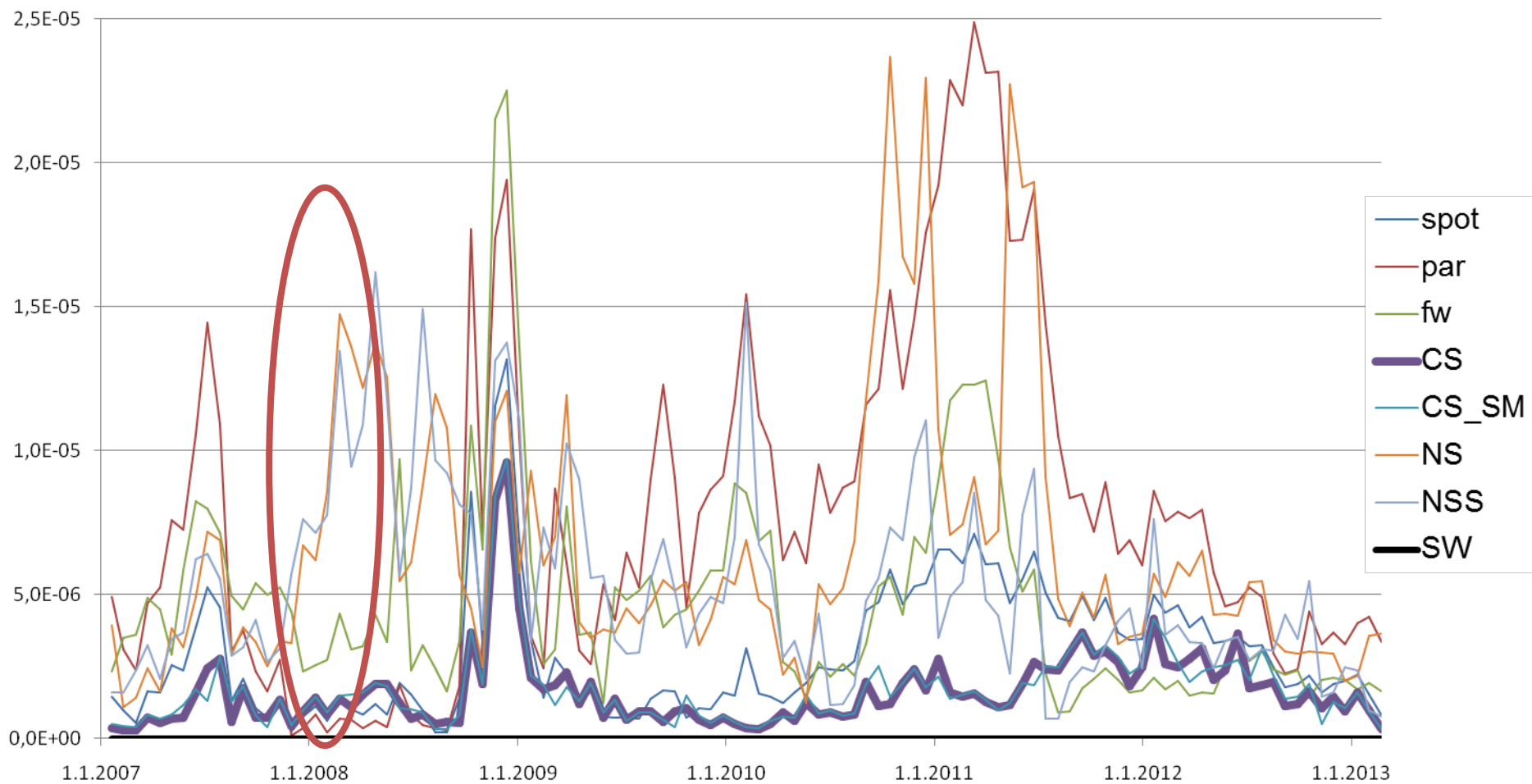
3) Fit (0-15)



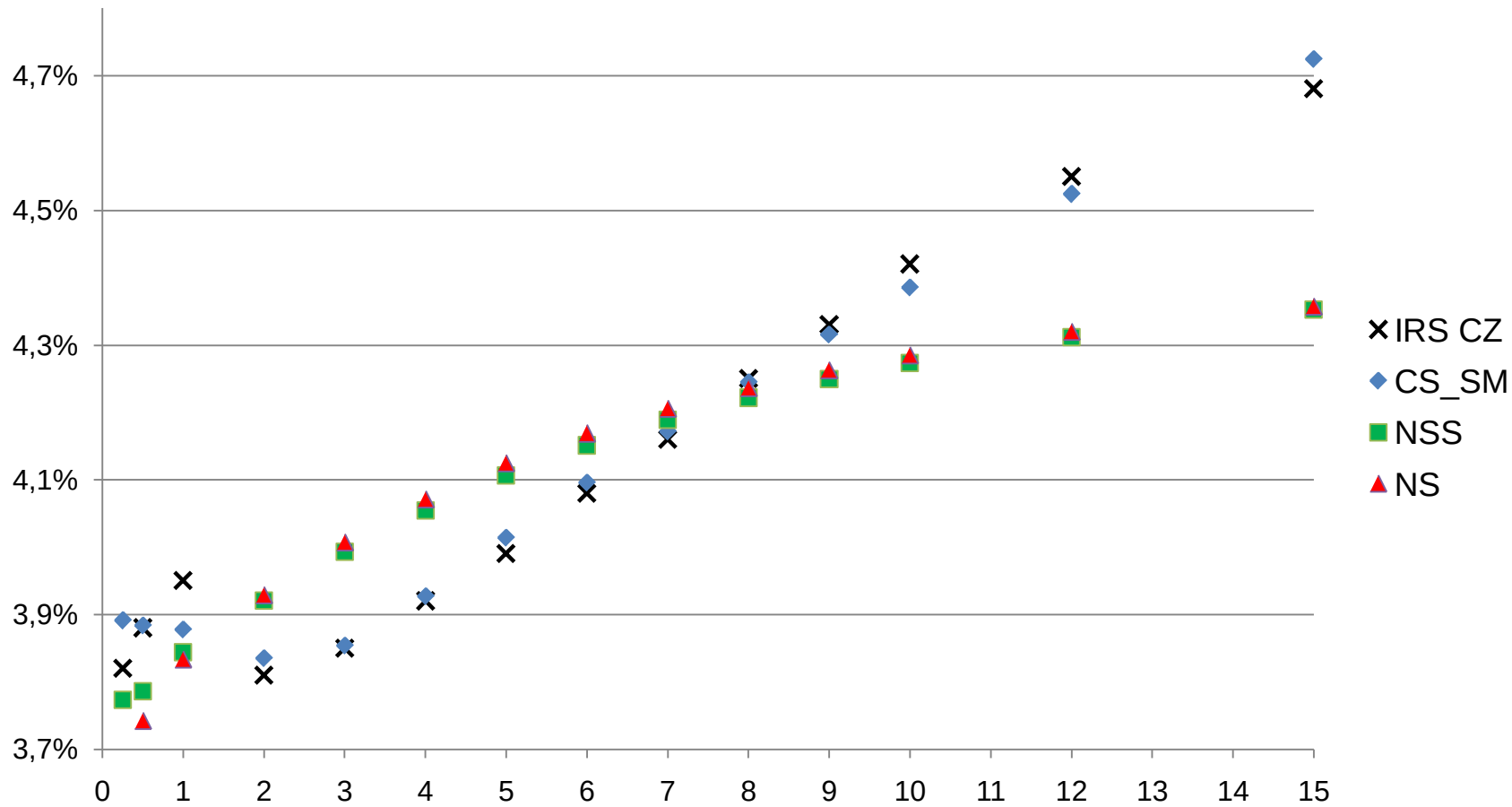
3) Fit – dílčí intervaly



3) Fit – porovnání kandidátů



3) Fit – porovnání kandidátů



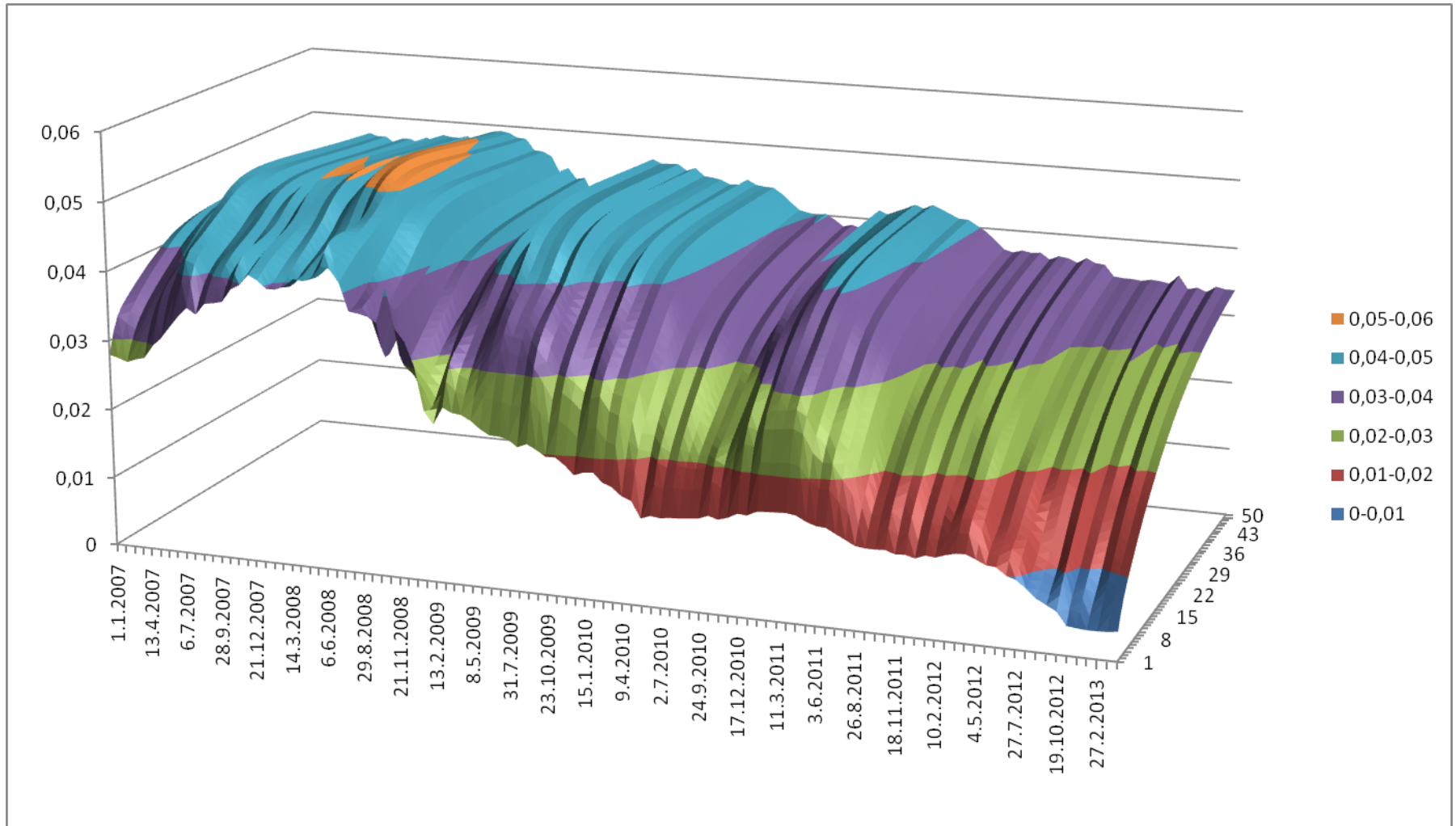
Hodnocení

- Interpolace + extrapolace

	„Hrbatost“ forwardových sazeb	Volatilita PVFCF	FIT na tržní data
NS	ANO	ANO	NE
NSS	ANO	ANO	NE
SW	NE	ANO	ANO
S-W_CS	NE	NE	ANO
S-W_CS_SM	ANO	ANO	ANO
CS + lin. extrapol.	NE	NE	ANO
CS_SM + lin. extrapol.	ANO	NE	ANO

- Interpolace – CS_SM, S-W_CS_SM

S-W_CS_SM



Děkujeme za pozornost

Zdroje

- User guide: Yield Curve Fitting v.105. <http://tools4f.com/file.php?id=46&extension=>
- *Technical Specifications part II on the Long-Term Guarantee Assessment.*
<https://eiopa.europa.eu/consultations/qis/insurance/long-term-guarantees-assessment/index.html>
- *QIS 5 Risk-free interest rates – Extrapolation method.*
http://ec.europa.eu/internal_market/insurance/docs/solvency/qis5/ceiops-paper-extrapolation-risk-free-rates_en.pdf
- BOLDER, David a David STRÉLISKI. Yield Curve Modelling at the Bank of Canada.
<http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/01/tr84.pdf>
- BOLDER, David a Scott GUSBA. Exponentials, Polynomials, and Fourier Series: More Yield Curve Modelling at the Bank of Canada. <http://www.bankofcanada.ca/wp-content/uploads/2010/02/wp02-29.pdf>
- HAGAN, Patrik S. a WEST Graeme. Methods for Constructing a Yield Curve.
- KOHOUT, Pavel. Ekonomická analýza výnosových křivek. <http://panda.hyperlink.cz/cestapdf/pdf05c3/kohout.pdf>
- NELSON, Charles R. a Andrew F. SIEGEL. Parsimonious Modeling of Yield Curves.
<http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf>
- SVENSSON. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994.
- MATĚJKA M.. Analýza metod vyrovnání výnosových křivek