Chyba predikce při rezervování metodou Chain Ladder u korelovaných vývojových trojúhelníků

Mgr. Marcela Martinů

13. května 2016

Obsah

Úvod do problematiky – motivace a cíle práce

- V praxi se často portfolio pojišťovny dělí do několika dílčích subportfolií (homogenita – Chain Ladder předpoklady)
- Závislostní struktury mezi vývojovými trojúhelníky různých odvětví i v rámci jednoho odvětví (např. povinné ručení – věcné škody x škody na zdraví)
- Z vývoje více vývojových trojúhelníků lze získat informace o celkovém portfoliu zohledňující chování dílčích vývojových trojúhelníků

Úvod do problematiky – motivace a cíle práce

- Pomocí metody Chain ladder získáme nejlepší odhad rezervy (best estimate)
- Jedná se o střední hodnotu potřebné rezervy
- Chceme-li kvantifikovat kvalitu odhadu rezerv => určení míry variability
- Problematika korelovaných trojúhelníků

Řešení:

a) Očistit data od některých společných vlivů => těžko odstranit všechny možné vlivy korelace

b) Použít metodu zohledňující závislostní struktury – např. rozšířená kovarianční metoda Chain Ladder

Cíl

- Výpočet chyby predikce pro dílčí portfolia bez zohlednění závislostní struktury
  - Výpočet náhodné chyby
  - Výpočet chyby odhadu

- Výpočet chyby predikce pro korelované portfolio skládající se ze dvou dílčích portfolií
  - Výpočet náhodné chyby
  - Výpočet chyby odhadu

METODY zohledňující korelace mezi vývojovými trojúhelníky

- Různé přístupy
- Hlavní rozdíly spočívají v určení parametrů Chain Ladder metody (CL)

1. Rozšířené metody Chain Ladder

   a) metody založené na klasickém výpočtu CL parametrů (univariate)
   - **Braun**
   - Merz – Wüthrich

   b) metody založené na výpočtu CL parametrů zohledňující korelaci pro více trojúhelníků najednou (multivariate)
   - Pröhl – Schmidt
   - Schmidt

2. Aditivní metody - založené na principu rozšířeného lineárního modelu
   - Hess – Schmidt - Zocher, Schmidt

METODY zohledňující korelace mezi vývojovými trojúhelníky

- **Christian Braun (2004)**

- Model pro dva vývojové trojúhelníky
- Zohledňuje korelaci mezi dvěma dílčími portfolii
- Rozšířením jednoduché Chain Ladder metody Macka
- Odhady parametrů CL (vývojové faktory) pro oba trojúhelníky zvlášť
- Odvodil vzorec pro podmíněnou chybu předpovědi MSEP (mean square error of prediction)

- Na tuto metodu se dále zaměříme v prezentaci

METODY zohledňující korelace mezi vývojovými trojúhelníky

- **Merz – Wüthrich (2006)**

- Podobný princip odhadu parametrů jako u Brauna (univariate estimators)
- Vzorec pro podmíněnou chybu predikce MSEP pro několik korelovaných vývojových trojúhelníků
- Užívá vícerozměrný model časových řad pro Chain Ladder metodu

METODY zohledňující korelace mezi vývojovými trojúhelníky

- **Pröhl - Schmidt (2005)**
- **Schmidt (2006)**

- Dokazují, že odhady parametrů metody CL jednoduchým způsobem nejsou optimální z pohledu klasického kritéria optimality v případě více korelovaných vývojových trojúhelníků

- Nahrazují tyto parametry novými parametry zohledňující korelační strukturu (multivariate estimators)

- Neznají vzorec pro určení MSEP

- Zabývají se pouze prvními momenty

- MSEP později určili **Merz- Wüthrich**

METODY zohledňující korelace mezi vývojovými trojúhelníky

<u>Aditivní metody</u>

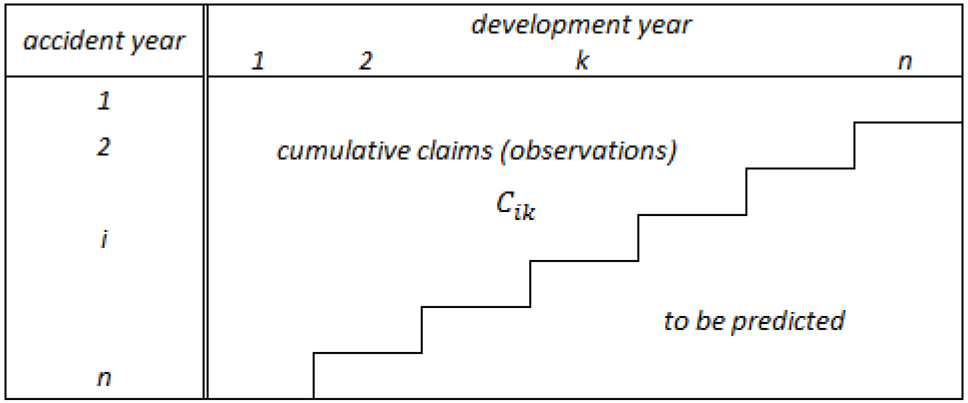
- Hess, Schmidt, Zocher (2006)
- Určení MSEP: Merz- Wüthrich

Základní znaky aditivní metody:

a. Jednoduchá a snadno aplikovatelná metoda odhadu škodních rezerv
b. Kombinuje znalost historických pozorování výší škod z trojúhelníku spolu s externí znalostí od expertů nebo a priori informací (počet PS, tržní data, data z podobného portfolia, …)
c. Aplikuje se na inkrementální data (umožňuje modelovat záporné hodnoty škod)
d. Odhad škodních rezerv nezávisí plně na pozorování poslední diagonály (tak jako tomu bývá u klasické CL metody)

Metoda Chain Ladder

- Kumulativní škodní úhrny $C_{ik} \geq 0$, pro vznikový rok $1 \leq i \leq n$, po *k* letech vývoje $1 \leq k \leq n$
- Pozorované výše škod C_{ik}, $i + k \leq n + 1$
- Odhadujeme C_{in} pro $i = 2, 3, \dots, n$



Metoda Chain Ladder – způsob výpočtu

- Pro metodu CL platí rekurzivní formule:

$$\widehat{C}_{ik} = \widehat{C}_{i,k-1} \cdot \widehat{f}_k$$

- Poč. hodnota $\widehat{C_{i,n+1-i}}=C_{i,n+1-i}$

- Vývojové faktory odhadneme následovně:

$$\widehat{f}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} C_{ik}}{C_{<,k-1}} = \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{C_{i,k-1}}{C_{<,k-1}} \cdot F_{ik}$$

$$C_{<,k-1} := \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1}$$

- Individuální vývojové koeficienty F_{ik}:

$$F_{ik} := \frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}}$$

Metoda Chain Ladder - pokračování

Zápisy:

- T_k *- všechny proměnné* $\{C_{ij} | 1 \le i \le n, 1 \le j \le k, i+j \le n+1\}$ *jsou dané*
- T_n *- celý doplněný trojúhelník*
- T_{ik}*-* $\{C_{ij} | 1 \le j \le k\}$

- Podle stochastických předpokladů Macka platí:

$$\mathrm{E}(F_{ik} | T_{i,k-1}) = f_k,$$

$$\mathrm{Var}(F_{ik} | T_{i,k-1}) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k-1}}$$

- Předpokládáme nezávislost vznikových řádků, $i = 1, \ldots, n$

- Parametry f_k a σ_k^2 jsou neznámé

- Odhad parametru rozptylu σ_k^2 :

$$\widehat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1}(F_{ik} - \widehat{f}_k)^2$$

Základní předpoklady – odhad parametru σ_k^2

- Dá se ukázat, že $\widehat{\sigma}_k^2$ je nestranným odhadem σ_k^2
- Dá se ukázat, že $\widehat{\sigma}_k^2$ je také nepodmíněně nestranným odhadem σ_k^2

- Je nutné odhadnout poslední koeficient variability
- Dle Macka je vztah následující:

$$\widehat{\sigma^2}_k = min(\frac{\widehat{\sigma^4}_{k-1}}{\widehat{\sigma^2}_{k-2}}, min\ (\widehat{\sigma^2}_{k-2}, \widehat{\sigma^2}_{k-1}))$$

- V praxi je poměrně časté, že poslední koeficient stanoví pojistný matematik expertním odhadem

Střední chyba předpovědi (MSEP)

- V aktuárské praxi nejznámější ukazatel ke kvantifikaci míry nejistoty výše škodních rezerv

- Lze ji rozdělit na dvě části:

Chyba předpovědi

Náhodná chyba | **Chyba odhadu**

- Náhodná chyba = podmíněná variabilita procesu (*conditional process variance)*

  - Popisuje variabilitu danou samotným stochastickým modelem
  - Nelze ji odstranit

- Chyba odhadu = (*estimation error)*

  - Zachycuje neurčitost odhadu parametru, resp. předpovědi

Chyba predikce pro jeden vývojový trojúhelník

a. **Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vznikový rok (měsíc, kvartál) škod *i***

$$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{in}) := \mathrm{E}((C_{in} - \widehat{C}_{in})^2 | T_n)$$

b. **Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník**

$$\mathrm{mse}\left(\sum_{i=2}^{n} \widehat{C}_{in}\right) := \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=2}^{n} (C_{in} - \widehat{C}_{in})\right)^2 \middle| T_n\right)$$

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden rok vzniku

Lze formulovat: $$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{in}) = \mathrm{Var}(C_{in}|T_{n+1-i}) + (\mathrm{E}(\widehat{C}_{in}|T_{n+1-i}) - \widehat{C}_{in})^2$$

Můžeme aproximovat: $$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{in}) \approx \mathrm{Var}(C_{in}|T_{n+1-i}) + \mathrm{Var}(\widehat{C}_{in}|T_{n+1-i}).$$

$\mathrm{Var}(C_{in}|T_{n+1-i})$ - náhodná chyba

$\mathrm{Var}(\widehat{C}_{in}|T_{n+1-i})$ - chyba odhadu

$\Rightarrow$ lze odvodit rekurzivní formule jednotlivých složek chyby predikce

Poznámka:

- *pro* $i + k > n + 1$ *místo podmíněných středních hodnot a rozptylů jsou dále pro zjednodušení použity střední hodnoty a rozptyly bez podmínky*

Chyba predikce ultimátních škod pro dané období vzniku

- Podle předpokladů Chain Ladder platí:

$$\mathrm{E}(F_{ik}|T_{i,k-1}) = f_k, \qquad \mathrm{Var}(F_{ik}|T_{i,k-1}) = \frac{\sigma_k^2}{C_{i,k-1}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathrm{E}(C_{ik}|T_{i,k-1}) = C_{i,k-1} f_k, \qquad \mathrm{Var}(C_{ik}|T_{i,k-1}) = C_{i,k-1}\sigma_k^2$$

- Náhodnou chybu $Var(C_{in})$ ultimátních výší škod určíme:

$$\widehat{\mathrm{Var}}(C_{ik}) = \widehat{\mathrm{Var}}(C_{i,k-1}) \cdot \widehat{f_k^2} + \widehat{C}_{i,k-1}\widehat{\sigma}_k^2$$

  - poč. hodnota $\widehat{Var}(C_{i,n+1-i}) = 0$, $C_{i,n+1-i}$ je již známé

Chyba predikce ultimátních škod pro dané období vzniku

- Chybu odhadu podmíněného rozptylu ultimátních výší škod $\widehat{C_{in}}$ můžeme vypočítat užitím uvedené rekurze:

$$\widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{C}_{ik}) = \widehat{\mathrm{Var}}(\widehat{C}_{i,k-1})\widehat{f_k^2} + \widehat{C}_{i,k-1}^2 \cdot \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{C_{<,k-1}}$$

  - poč. hodnota $\widehat{Var}(\hat{C}_{i,n+1-i}) = 0$
  - $C_{\widehat{i,n+1-i}}$ je pozorovaná hodnota

Chyba predikce ultimátních škod pro dané období vzniku

- Shrneme-li tedy odhad náhodné chyby pro jednotlivé vznikové roky a chyby odhadu, dostaneme hledaný vztah pro výpočet podmíněné střední chyby předpovědi konečné výše škod v jednotlivých obdobích vzniku škod *i*

- Celkovou chybu predikce lze rekurzivně zapsat:

$$\widehat{\mathrm{mse}}(\widehat{C}_{ik}) = \widehat{\mathrm{mse}}(\widehat{C}_{i,k-1}) \cdot \widehat{f_k^2} + \widehat{C}_{i,k-1}^2 \left(\frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{C}_{i,k-1}} + \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{C_{<,k-1}} \right)$$

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník

- Pojišťovny vykazují odhady výší škodních rezerv pro všechny období vzniku dohromady

- **Chyba predikce** pro jeden vývojový trojúhelník je definována jako:

$$\mathrm{mse}\left(\sum_{i=2}^{n}\widehat{C}_{in}\right) := \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=2}^{n}(C_{in}-\widehat{C}_{in})\right)^2 \middle| T_n\right)$$

- (C_{1n}) je známé, první období vzniku neovlivňuje výpočet náhodné chyby, ani chyby odhadu

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník

- Předchozí vztah výpočtu $mse(\sum_{i=2}^{n} \widehat{C_{in}})$ lze aproximovat výrazem:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in} \middle| T_n\right) + \sum_{i=2}^{n} \operatorname{Var}(\widehat{C}_{in} | T_{n+1-i}) + 2 \sum_{2 \le i < j \le n} \operatorname{Cov}(\widehat{C}_{in}, \widehat{C}_{jn} | T_{n+1-i}) \qquad (*)$$

- Náhodná chyba:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in} \middle| T_n\right)$$

- Chyba odhadu:

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=2}^{n} \widehat{C}_{in}\right) := \sum_{i=2}^{n} \operatorname{Var}(\widehat{C}_{in} | T_{n+1-i}) + \sum_{2 \le i < j \le n} 2 \operatorname{Cov}(\widehat{C}_{in}, \widehat{C}_{jn} | T_{n+1-i})$$

- *jedná se o pouze o označení části výrazu (*), nikoliv o rozptyl součtu odhadů škod*

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník – náhodná chyba

- Díky předpokladu nezávislosti řádků platí:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=n+2-k}^{n} C_{in}\right) = \sum_{i=n+2-k}^{n} \mathrm{Var}(C_{in})$$

- Rekurzivní vztah pro výpočet:

$$\widehat{\mathrm{Var}}\left(\sum_{i=n+2-k}^{n} C_{ik}\right) = \widehat{\mathrm{Var}}\left(\sum_{i=n+3-k}^{n} C_{i,k-1}\right)\widehat{f_k^2} + \widehat{C}_{\geq,k-1}\widehat{\sigma}_k^2.$$

- Zápis $\hat{C}_{\geq,k-1}$ vyjadřuje: $$\widehat{C}_{\geq,k-1} := \sum_{i=n+2-k}^{n} \widehat{C}_{i,k-1}$$

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník – chyba odhadu

- U chyby odhadu neplatí nezávislost řádků
- Nutno uvažovat korelace mezi různými vzniky škod

- Rekurzivní vztah, pomocí kterého lze vypočítat kovarianci mezi odhady ultimátních škodních úhrnů:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{ik}, \widehat{C}_{jk}) = \widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{i,k-1}, \widehat{C}_{j,k-1})\widehat{f_k^2} + \widehat{C}_{i,k-1}\widehat{C}_{j,k-1}\frac{\widehat{\sigma}_k^2}{C_{<,k-1}}$$

- Poč. hodnota: $\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{i,n+1-i}, \widehat{C}_{j,n+1-i}) = 0$, $i < j$, $C_{i,n+1-i}$ je známé

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník – chyba odhadu (pokračování)

- **Rekurzivní formule pro výpočet chyby odhadu**:

$$\widehat{\mathrm{Var}}\Big(\sum_{i=n+2-k}^{n} \widehat{C}_{ik}\Big) = \widehat{\mathrm{Var}}\Big(\sum_{i=n+3-k}^{n} \widehat{C}_{i,k-1}\Big)\widehat{f_k^2} + (\widehat{C}_{\geq,k-1})^2 \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{C_{<,k-1}}$$

- Rekurze začíná od $k = 2$

Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vývojový trojúhelník – chyba predikce

- Chyba predikce celkových škodních úhrnů pro všechny vznikové roky:

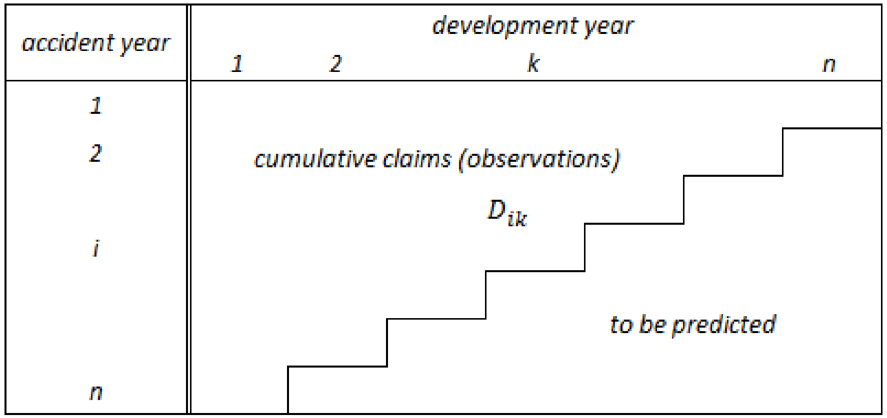
$$\widehat{\text{mse}}\left(\sum_{i=n+2-k}^{n}\widehat{C}_{ik}\right) = \widehat{\text{mse}}\left(\sum_{i=n+3-k}^{n}\widehat{C}_{i,k-1}\right)\widehat{f_k^2} + (\widehat{C}_{\geq,k-1})^2\left(\frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{C}_{\geq,k-1}} + \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{C_{<,k-1}}\right)$$

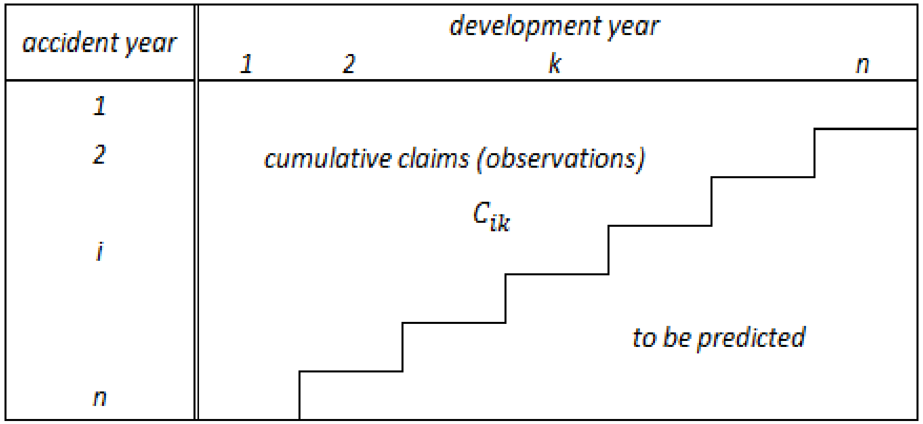
- **Chyba predikce** $mse(\sum_{i=1}^{n}\widehat{C_{in}})$ vyjadřuje střední kvadratickou odchylku mezi odhadnutými úhrny ultimátních škod a skutečnými úhrny ultimátních škod

- **Chyba odhadu** $Var(\sum_{i=1}^{n}\widehat{C_{in}})$ vyjadřuje střední kvadratickou odchylku mezi odhadnutými úhrny škod a očekávanými úhrny ultimátních škod $E(\sum_{i=1}^{n}C_{in}) = E\left(\sum_{i=1}^{n}\widehat{C_{in}}\right)$

Chain Ladder – korelace mezi run-off trojúhelníky

- Uvažujeme druhý kumulativní vývojový trojúhelník $\{D_{ik}\}$





Chain Ladder – korelace mezi run-off trojúhelníky

- Odhady neznámých parametrů pro druhý vývojový trojúhelník:

$$\widehat{g}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} D_{ik}}{D_{<,k-1}}$$

$$\widehat{\tau}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k+1} D_{i,k-1}(G_{ik} - \widehat{g}_k)^2$$

- Kde individuální vývojové faktory se určí:

$$G_{ik} := \frac{D_{ik}}{D_{i,k-1}}$$

- zápis $D_{<,k-1}$ vyjadřuje:

$$D_{<,k-1} := \sum_{i=1}^{n+1-k} D_{i,k-1}$$

Chain Ladder – korelace mezi run-off trojúhelníky

- Pro druhý vývojový trojúhelník opět platí stejné stochastické předpoklady metody CL

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(G_{ik}|T_{i,k-1}) &= g_k \\ \mathrm{Var}(G_{ik}|T_{i,k-1}) &= \frac{\tau_k^2}{D_{i,k-1}}\end{aligned}$$

- Parametr g_k v trojúhelníku $\{D_{ik}\}$ odpovídá parametru f_k v trojúhelníku $\{C_{ik}\}$
- Parametr τ_k^2 z trojúhelníku $\{D_{ik}\}$ odpovídá parametru σ_k^2 z trojúhelníku $\{C_{ik}\}$
- Opět předpokládáme nezávislost vznikových řádků, $i = 1, \dots, n$

Chain Ladder – korelace mezi run-off trojúhelníky

- Výpočet korelace mezi dvěma vývojovými trojúhelníky
- Z předpokladu modelu podle Brauna (rozšíření Mackovy metody) pro kovarianci platí:

$$\mathrm{Cov}(F_{ik}, G_{ik} | T_{i,k-1}) = \frac{\rho_k}{\sqrt{C_{i,k-1} D_{i,k-1}}}$$

- Korelační koeficient mezi dvěma individuálními vývojovými faktory:

$$Corr(F_{ik}, G_{ik} | T_{i,k-1}) = \frac{Cov(F_{ik}, G_{ik} | T_{i,k-1})}{\sqrt{Var(F_{ik} | T_{i,k-1}) \cdot Var(G_{ik} | T_{i,k-1})}} = \frac{\rho_k}{\sigma_k \tau_k}$$

- Korelační koeficienty závisí na vývojovém období, ale nezávisí na období vzniku

Chain Ladder – korelace mezi run-off trojúhelníky

- Úhrny škod z různých vznikových období (měsíce, kvartály) portfolia skládajícího se z dílčích portfolií $\{C_{ik}\}$ a $\{D_{ik}\}$ jsou nezávislé

- Z předpokladu nezávislosti řádků lze odvodit i podmíněnou nekorelovanost vzhledem k „useknutému trojúhelníku“

$$Cov(C_{ik}, D_{jk}|T_{k-1}) = 0 \text{ pro } i \neq j$$

$$Cov(F_{ik}, G_{jk}|\, T_{k-1}) = 0 \text{ pro } i \neq j$$

Chain Ladder – korelace mezi run-off trojúhelníky

- Neznámý parametr ρ_k lze odhadnout následovně:

$$\widehat{\rho}_k = \frac{1}{n-k-1+w_k^2} \sum_{i=1}^{n+1-k} \sqrt{C_{i,k-1} D_{i,k-1}} (F_{ik} - \widehat{f}_k)(G_{ik} - \widehat{g}_k)$$

- Hodnota parametru w_k^2 se vypočítá:

$$w_k^2 := \frac{\left(\sum_{i=1}^{n+1-k} \sqrt{C_{i,k-1} D_{i,k-1}}\right)^2}{C_{<,k-1} \cdot D_{<,k-1}}$$

- w_k^2 zajišťuje, že odhad $\widehat{\rho}_k$ pro ρ_k bude nestranný

Chyba predikce pro dva vývojové trojúhelníky

a. **Chyba predikce ultimátních škod pro jeden vznikový rok (měsíc, kvartál) škod *i* pro dva vývojové trojúhelníky**

$$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}) := \mathrm{E}((C_{in} + D_{in} - (\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}))^2 | T_n)$$

b. **Chyba predikce ultimátních škod pro dva vývojové trojúhelníky**

$$\mathrm{mse}\left(\sum_{i=2}^{n}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in})\right) := \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=2}^{n}(C_{in} + D_{in} - (\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}))\right)^2 \middle| T_n\right)$$

Chyba predikce pro dva vývojové korelované trojúhelníky - jeden vznikový rok

- Podobně jako pro jeden vývojový trojúhelník definujeme chybu predikce $mse(\widehat{C_{in}} + \widehat{D_{in}})$

$$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}) := \mathrm{E}((C_{in} + D_{in} - (\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}))^2 | T_n)$$

- Aproximace:

$$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}) \approx \mathrm{Var}(C_{in} + D_{in} | T_{n+1-i}) + \mathrm{Var}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in} | T_{n+1-i})$$

- Náhodná chyba: $\mathrm{Var}(C_{in} + D_{in} | T_{n+1-i})$

- Chyba odhadu: $\mathrm{Var}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in} | T_{n+1-i})$

Chyba predikce pro dva vývojové korelované trojúhelníky - jeden vznikový rok – náhodná chyba

- Náhodná chyba $Var(C_{in}+D_{in})$ kombinovaného trojúhelníku $\{C_{ik} + D_{ik} | i + k \leq n + 1\}$:

$$\mathrm{Var}(C_{in} + D_{in}) = \mathrm{Var}(C_{in}) + 2\mathrm{Cov}(C_{in}, D_{in}) + \mathrm{Var}(D_{in})$$

- Vyjádříme rekurzivní formuli pro kovarianci $Cov(C_{in}\ , D_{in})$

$$Cov(C_{ik,} D_{ik}) \quad = \quad \mathrm{E}(\sqrt{C_{i,k-1} D_{i,k-1}})\rho_k + \mathrm{Cov}(C_{i,k-1}, D_{i,k-1}) f_k g_k$$

Chyba predikce pro dva vývojové korelované trojúhelníky - jeden vznikový rok– náhodná chyba (pokračování)

- Na jejím základě určíme rekurzivní formuli pro její odhad:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(C_{ik}, D_{ik}) = \widehat{\mathrm{Cov}}(C_{i,k-1}, D_{i,k-1})\widehat{f}_k\widehat{g}_k + \sqrt{\widehat{C}_{i,k-1}\widehat{D}_{i,k-1}}\widehat{\rho}_k$$

- Pro $i + k > n + 1$
- Počáteční podmínka: $\widehat{\mathrm{Cov}}(C_{i,n+1-i}, D_{i,n+1-i}) = 0$

- Z předpokladu o kovarianci individuálních vývojových faktorů vyplývá:

$$\mathrm{Cov}(C_{ik}, D_{ik}|T_{i,k-1}) = \sqrt{C_{i,k-1}D_{i,k-1}}\rho_k$$

Chyba predikce pro dva vývojové korelované trojúhelníky - jeden vznikový rok – chyba odhadu

- Chybu odhadu opět rozepíšeme jako součet jednotlivých rozptylů a kovariance:

$$\mathrm{Var}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}) = \mathrm{Var}(\widehat{C}_{in}) + 2\mathrm{Cov}(\widehat{C}_{in}, \widehat{D}_{in}) + \mathrm{Var}(\widehat{D}_{in})$$

- Rozptyly odhadů konečných škod $\widehat{C_{in}},\ \widehat{D_{in}}$ umíme odhadnout pomocí předchozích vzorců

Chyba predikce pro dva vývojové korelované trojúhelníky - jeden vznikový rok – chyba odhadu (pokračování)

- Kovarianční člen odhadneme pomocí formule:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{ik}, \widehat{D}_{ik}) = \widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{i,k-1}, \widehat{D}_{i,k-1}) \cdot \widehat{f}_k \widehat{g}_k + \frac{\widehat{C}_{i,k-1} \widehat{D}_{i,k-1}}{C_{<,k-1} \cdot D_{<,k-1}} \widehat{\rho}_k \sum_{j=1}^{n+1-k} \sqrt{C_{j,k-1} D_{j,k-1}}$$

- Počáteční podmínka: $\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{i,n+1-i}, \widehat{D}_{i,n+1-i}) = 0$

$$C_{<,k-1} := \sum_{i=1}^{n+1-k} C_{i,k-1}$$

$$D_{<,k-1} := \sum_{i=1}^{n+1-k} D_{i,k-1}$$

Chyba predikce agregované konečné škody pro dva vývojové trojúhelníky

- Uvažujme všechny dvojice odhadů konečných výší škod získané z dvou vývojových trojúhelníků
- $i = 2, \dots, n$ (*i=1* neuvažujeme, protože pro něj je konečná výše škod již známá)
- Chybu predikce $mse(\sum_{i=2}^{n}(\widehat{C_{in}} + \widehat{D_{in}}))$ zavedeme analogicky jako v předchozí části

$$\mathrm{mse}\left(\sum_{i=2}^{n}(\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in})\right) := \mathrm{E}\left(\left(\sum_{i=2}^{n}(C_{in} + D_{in} - (\widehat{C}_{in} + \widehat{D}_{in}))\right)^2 \middle| T_n\right)$$

Chyba predikce agregované konečné škody pro dva vývojové trojúhelníky

- Což můžeme opět aproximovat vztahem

$$\approx \quad \mathrm{Var}\left(\sum_{i=2}^{n}(C_{in}+D_{in})\middle| T_n\right)$$

$$+\underbrace{\mathrm{Var}\left(\sum_{i=2}^{n}\widehat{C}_{in}\right)+\mathrm{Var}\left(\sum_{i=2}^{n}\widehat{D}_{in}\right)}+\sum_{1\le i,j\le n} 2\,\mathrm{Cov}(\widehat{C}_{in},\widehat{D}_{jn}|T_{n+1-min(i,j)})$$

Tyto dva členy vypočítáme pomocí rekurzivní formule pro výpočet chyby odhadu pro jeden vývojový trojúhelník

- Kde $\min(i,j)$ značí minimum z *i* a *j.*

Chyba predikce agregované konečné škody pro dva vývojové trojúhelníky – náhodná chyba

- Náhodná chyba $Var(\sum_{i=2}^{n}(C_{in} + D_{in}))$ se rovná

$$= \operatorname{Var}\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in}\right) + 2\operatorname{Cov}\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in}, \sum_{i=2}^{n} D_{in}\right) + \operatorname{Var}\left(\sum_{i=2}^{n} D_{in}\right)$$

- Náhodné chyby $Var(\sum_{i=2}^{n} C_{in})$ a $Var(\sum_{i=2}^{n} D_{in})$ jsme určili už v předchozí části (rekurzivní vzorce pro výpočet náhodné chyby pro jeden vývojový trojúhelník)

- Stačí určit pouze kovarianci konečných výší škod

Chyba predikce agregované konečné škody pro dva vývojové trojúhelníky – náhodná chyba (pokračování)

- Vzhledem k nezávislosti škodních úhrnů vznikových období můžeme psát:

$$\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=2}^{n} C_{in}, \sum_{i=2}^{n} D_{in}\right) = \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Cov}(C_{in}, D_{in})$$

- Užitím rekurze pro $\widehat{Cov}\ (C_{ik}, D_{ik})$, $2 \leq i \leq n$ získáme:

$$\widehat{\mathrm{Cov}}\left(\sum_{i=n+2-k}^{n} C_{ik}, \sum_{i=n+2-k}^{n} D_{ik}\right)$$
$$= \widehat{\mathrm{Cov}}\left(\sum_{i=n+3-k}^{n} C_{i,k-1}, \sum_{i=n+3-k}^{n} D_{i,k-1}\right)\widehat{f}_k\widehat{g}_k + \widehat{\rho}_k \sum_{i=n+2-k}^{n} \sqrt{\widehat{C}_{i,k-1}\widehat{D}_{i,k-1}}$$

Chyba predikce agregované konečné škody pro dva vývojové trojúhelníky – chyba odhadu

- Rozptyly $Var(\sum_{i=2}^{n} \widehat{C_{in}})$ a $Var(\sum_{i=2}^{n} \widehat{D_{in}})$ jsme určili v předchozí části
- Stačí určit kovarianční člen
- Rekurze:

$$\sum_{i,j=n+2-k}^{n} \widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{ik}, \widehat{D}_{jk}) = \sum_{i,j=n+3-k}^{n} \widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{C}_{i,k-1}, \widehat{D}_{j,k-1}) \widehat{f}_k \widehat{g}_k + \widehat{C}_{\geq,k-1} \widehat{D}_{\geq,k-1} \widehat{\rho}_k \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} \sqrt{C_{i,k-1} \cdot D_{i,k-1}}}{C_{<,k-1} \cdot D_{<,k-1}}$$

- Poč. hodnota $k = 2$
- Tato rekurze doplňuje celkovou rekurzi pro chybu odhadu a chybu predikce pro dva vývojové korelované trojúhelníky

Numerický příklad

- Reálná data (upravená)
- Dva vývojové trojúhelníky stejné struktury
- Trojúhelníky celkových závazků
- Odvětví: pracovní neschopnost (PN)
- Trojúhelníky sestaveny pro dva různé partnery
- Hodnoty v CZK

Trojúhelník – odvětví pracovní neschopnost

- **1. partner**

- Kumulativní trojúhelník
- Incurred

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
03/2013	2 134 780	13 196 694	16 767 905	18 592 185	19 448 277	19 968 525	20 230 861	20 391 821	20 511 455	20 560 723	20 587 450	20 655 122
06/2013	1 065 607	10 259 399	13 124 727	14 294 130	14 788 453	15 065 125	15 374 245	15 533 642	15 616 459	15 704 859	15 799 028	
09/2013	1 478 857	12 227 592	15 804 645	17 010 486	17 763 708	18 153 903	18 472 899	18 600 461	18 702 718	18 707 981		
12/2013	2 153 576	13 955 321	17 113 398	18 093 267	19 123 848	19 633 572	19 909 860	20 029 755	20 126 067			
03/2014	1 412 605	13 533 429	17 156 240	18 625 504	19 485 204	20 019 991	20 143 586	20 536 987				
06/2014	1 414 223	12 476 313	16 221 772	17 778 678	18 471 581	18 827 146	19 107 024					
09/2014	1 544 222	12 897 733	17 145 145	18 990 630	19 856 388	20 486 718						
12/2014	1 621 286	11 353 675	15 061 677	16 630 148	17 543 308							
03/2015	1 823 488	13 352 047	16 562 392	18 363 116								
06/2015	1 563 987	11 889 924	15 533 596									
09/2015	997 243	12 438 331										
12/2015	1 656 047											

Trojúhelník – odvětví pracovní neschopnost

- **2. partner**

- Kumulativní trojúhelník
- Incurred

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
06/2013	1 698 058	9 198 380	11 329 144	12 210 331	12 681 608	13 061 790	13 209 487	13 221 112	13 256 744	13 268 705	13 454 027	13 459 254
09/2013	1 183 015	7 263 695	9 389 302	9 958 591	10 421 031	10 717 085	10 853 027	10 853 027	10 888 929	10 890 632	10 890 632	
12/2013	820 397	8 771 168	10 465 663	10 693 839	11 254 182	11 287 165	11 461 643	11 468 801	11 527 870	11 527 870		
03/2014	1 093 294	8 950 557	10 616 546	11 302 712	11 998 663	12 107 868	12 148 288	12 184 337	12 264 658			
06/2014	979 444	8 020 902	9 709 238	10 182 439	10 674 782	10 824 862	10 972 013	10 986 947				
09/2014	718 722	6 718 622	8 224 120	9 119 314	9 275 748	9 543 703	9 561 569					
12/2014	981 889	7 464 119	9 918 730	10 168 213	10 538 732	10 867 784						
03/2015	1 039 123	7 690 828	9 279 219	9 940 579	10 618 751							
06/2015	1 129 099	8 126 996	9 983 358	11 441 420								
09/2015	1 153 481	7 639 529	9 818 789									
12/2015	1 024 179	8 205 957										
03/2016	799 924											

Odhad parametrů CL

- Odhad vývojových koeficientů:

DY	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\widehat{f}_k$	7,994	1,282	1,093	1,046	1,025	1,014	1,010	1,005	1,003	1,003	1,003
$\widehat{g}_k$	7,449	1,237	1,069	1,047	1,020	1,010	1,001	1,004	1,000	1,008	1,000

- Odhad parametrů rozptylu:

DY	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\widehat{\sigma}_k^2$	4 228 475,4	14 993,3	5 167,5	897,7	415,2	425,3	600,9	3,9	123,8	196,4	123,8
$\hat{\tau}_k^2$	2 259 530,0	17 554,8	15 058,2	2 473,0	1 521,7	348,3	14,8	38,8	2,9	1 166,8	2,9

DY = development year / quarter

Odhad parametrů CL

- <u>Odhad parametrů rozptylu</u>

- Nemáme dostatek dat k odhadu $\hat{\sigma}_{12}^2$ a $\hat{\tau}_{12}^2$
- Aproximace dle *Macka*:

$$\hat{\sigma}_{12}^2 = min\ (\hat{\sigma}_{10}^4/\hat{\sigma}_{11}^2;\ min\ (\hat{\sigma}_{10}^2,\ \hat{\sigma}_{11}^2)) = 123,\ 8$$

- Analogicky pro $\hat{\tau}_{12}^2$

Odhad IBNR rezervy

- Pro každé období vzniku *i* odhad rezervy pro pracovní neschopnost – 1. partner

$$\hat{C}_{in} - C_{i,n+1-i}$$

- Pro každé období vzniku *i* odhad rezervy pro pracovní neschopnost – 2. partner

$$\widehat{D}_{in} - D_{i,n+1-i}$$

- Pro portfolio (partner 1 + partner 2)

Odhad IBNR rezervy – pracovní neschopnost

- 1. partner

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Rezerva
03/2013	2 134 780	13 196 694	16 767 905	18 592 185	19 448 277	19 968 525	20 230 861	20 391 821	20 511 455	20 560 723	20 587 450	20 655 122	
06/2013	1 065 607	10 259 399	13 124 727	14 294 130	14 788 453	15 065 125	15 374 245	15 533 642	15 616 459	15 704 859	15 799 028	**15 850 961**	51 932
09/2013	1 478 857	12 227 592	15 804 645	17 010 486	17 763 708	18 153 903	18 472 899	18 600 461	18 702 718	18 707 981	**18 770 346**	**18 832 046**	124 065
12/2013	2 153 576	13 955 321	17 113 398	18 093 267	19 123 848	19 633 572	19 909 860	20 029 755	20 126 067	**20 178 532**	**20 245 799**	**20 312 349**	186 281
03/2014	1 412 605	13 533 429	17 156 240	18 625 504	19 485 204	20 019 991	20 143 586	20 536 987	**20 647 451**	**20 701 274**	**20 770 285**	**20 838 558**	301 571
06/2014	1 414 223	12 476 313	16 221 772	17 778 678	18 471 581	18 827 146	19 107 024	**19 302 133**	**19 405 956**	**19 456 542**	**19 521 403**	**19 585 572**	478 548
09/2014	1 544 222	12 897 733	17 145 145	18 990 630	19 856 388	20 486 718	**20 774 790**	**20 986 930**	**21 099 814**	**21 154 817**	**21 225 339**	**21 295 108**	808 391
12/2014	1 621 286	11 353 675	15 061 677	16 630 148	17 543 308	**17 981 086**	**18 233 926**	**18 420 119**	**18 519 198**	**18 567 473**	**18 629 370**	**18 690 606**	1 147 298
03/2015	1 823 488	13 352 047	16 562 392	18 363 116	**19 211 104**	**19 690 500**	**19 967 376**	**20 171 271**	**20 279 769**	**20 332 633**	**20 400 415**	**20 467 472**	2 104 357
06/2015	1 563 987	11 889 924	15 533 596	**16 971 701**	**17 755 435**	**18 198 506**	**18 454 403**	**18 642 848**	**18 743 124**	**18 791 983**	**18 854 629**	**18 916 605**	3 383 009
09/2015	997 243	12 438 331	**15 951 833**	**17 428 658**	**18 233 494**	**18 688 495**	**18 951 282**	**19 144 801**	**19 247 777**	**19 297 951**	**19 362 284**	**19 425 929**	6 987 598
12/2015	1 656 047	**13 238 898**	**16 978 540**	**18 550 418**	**19 407 056**	**19 891 342**	**20 171 042**	**20 377 017**	**20 486 621**	**20 540 025**	**20 608 498**	**20 676 239**	19 020 192
													34 593 243

Odhad IBNR rezervy – pracovní neschopnost

- 2. partner

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Rezerva
03/2013	1 698 058	9 198 380	11 329 144	12 210 331	12 681 608	13 061 790	13 209 487	13 221 112	13 256 744	13 268 705	13 454 027	13 459 254	
06/2013	1 183 015	7 263 695	9 389 302	9 958 591	10 421 031	10 717 085	10 853 027	10 853 027	10 888 929	10 890 632	10 890 632	**10 894 863**	4 230
09/2013	820 397	8 771 168	10 465 663	10 693 839	11 254 182	11 287 165	11 461 643	11 468 801	11 527 870	11 527 870	**11 616 299**	**11 620 811**	92 941
12/2013	1 093 294	8 950 557	10 616 546	11 302 712	11 998 663	12 107 868	12 148 288	12 184 337	12 264 658	**12 269 356**	**12 363 472**	**12 368 275**	103 617
03/2014	979 444	8 020 902	9 709 238	10 182 439	10 674 782	10 824 862	10 972 013	10 986 947	**11 035 503**	**11 039 730**	**11 124 414**	**11 128 735**	141 788
06/2014	718 722	6 718 622	8 224 120	9 119 314	9 275 748	9 543 703	9 561 569	**9 572 944**	**9 615 251**	**9 618 934**	**9 692 719**	**9 696 484**	134 915
09/2014	981 889	7 464 119	9 918 730	10 168 213	10 538 732	10 867 784	**10 974 552**	**10 987 608**	**11 036 167**	**11 040 394**	**11 125 083**	**11 129 404**	261 620
12/2014	1 039 123	7 690 828	9 279 219	9 940 579	10 618 751	**10 835 080**	**10 941 527**	**10 954 543**	**11 002 956**	**11 007 170**	**11 091 604**	**11 095 913**	477 162
03/2015	1 129 099	8 126 996	9 983 358	11 441 420	**11 973 609**	**12 217 540**	**12 337 568**	**12 352 246**	**12 406 835**	**12 411 587**	**12 506 794**	**12 511 653**	1 070 233
06/2015	1 153 481	7 639 529	9 818 789	**10 492 637**	**10 980 695**	**11 204 398**	**11 314 473**	**11 327 933**	**11 377 995**	**11 382 354**	**11 469 666**	**11 474 121**	1 655 332
09/2015	1 024 179	8 205 957	**10 147 285**	**10 843 677**	**11 348 063**	**11 579 250**	**11 693 007**	**11 706 918**	**11 758 655**	**11 763 159**	**11 853 392**	**11 857 997**	3 652 040
12/2015	799 924	**5 958 525**	**7 368 166**	**7 873 831**	**8 240 077**	**8 407 947**	**8 490 548**	**8 500 649**	**8 538 217**	**8 541 487**	**8 607 008**	**8 610 351**	7 810 427
													15 404 303

Odhad IBNR rezervy

- Odhad IBNR rezervy pro trojúhelníky pracovní neschopnosti pro 1. partnera, 2. partnera a pro oba partnery dohromady

Období vzniku	PN run-off 1. partner	PN run-off 2. partner	Portfolio (1. + 2.)
03/2013	0	0	0
06/2013	51 932	4 230	56 163
09/2013	124 065	92 941	217 006
12/2013	186 281	103 617	289 898
03/2014	301 571	141 788	443 359
06/2014	478 548	134 915	613 463
09/2014	808 391	261 620	1 070 011
12/2014	1 147 298	477 162	1 624 460
03/2015	2 104 357	1 070 233	3 174 590
06/2015	3 383 009	1 655 332	5 038 341
09/2015	6 987 598	3 652 040	10 639 638
12/2015	19 020 192	7 810 427	26 830 618
TOTAL	**34 593 243**	**15 404 303**	**49 997 546**

Výpočet korelačního koeficientu

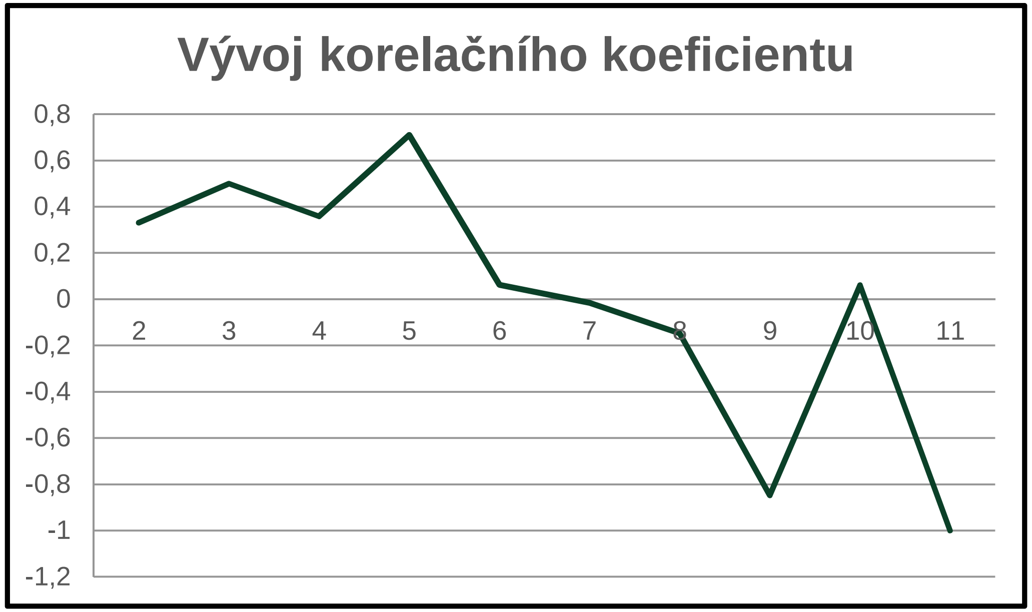
- Odhad parametru w_k, ρ_k a korelačního koeficientu

DY	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\widehat{w_k^2}$	0,986	0,998	0,998	0,998	0,997	0,997	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000
$\widehat{\rho_k}$	1 021 093,3	8 108,3	3 165,7	1 059,0	49,6	-5,8	-14,0	-10,4	1,2	-478,7	-
$\widehat{\rho_k}/(\widehat{\sigma_k}\widehat{\tau_k})$	0,330	0,500	0,359	0,711	0,062	-0,015	-0,148	-0,848	0,061	-1,000	-

- Poslední hodnota korelačního koeficientu je pouze na základě dvou pozorování

Korelace mezi 2 trojúhelníky

- Grafické znázornění korelačního koeficientu pro jednotlivá vývojová období



Výpočet náhodné chyby (process error deviation)

- Pro oba vývojové trojúhelníky zvlášť
- Portfolio – zohlednění korelace mezi run-off trojúhelníky

Období vzniku	PN run-off 1. partner		PN run-off 2. partner		Portfolio	
	náhodná chyba	náhodná chyba %	náhodná chyba	náhodná chyba %	náhodná chyba	náhodná chyba %
03/2013	0		0		0	
06/2013	44 229		5 631		44 586	
09/2013	77 602	63%	116 168	125%	139 703	64%
12/2013	94 977	51%	119 997	116%	153 036	53%
03/2014	96 621	32%	115 713	82%	149 688	34%
06/2014	143 514	30%	108 679	81%	178 131	29%
09/2014	177 623	22%	132 095	50%	219 235	20%
12/2014	188 576	16%	185 317	39%	265 463	16%
03/2015	240 111	11%	263 855	25%	402 728	13%
06/2015	391 161	12%	490 565	30%	722 004	14%
09/2015	658 554	9%	667 402	18%	1 115 354	10%
12/2015	4 188 308	22%	2 024 275	26%	5 230 378	19%
Total	**4 277 888**	**12,4%**	**2 226 725**	**14%**	**5 431 569**	**11%**

Výpočet chyby odhadu (estimation error)

- Pro oba vývojové trojúhelníky zvlášť
- Portfolio – zohlednění korelace mezi run-off trojúhelníky

Období vzniku	PN run-off 1. partner		PN run-off 2. partner		Portfolio	
	Chyba odhadu	Chyba odhadu %	Chyba odhadu	Chyba odhadu %	Chyba odhadu	Chyba odhadu %
03/2013	0		0		0	
06/2013	38 746		5 067		39 076	
09/2013	63 456	51%	80 326	86%	102 367	47%
12/2013	74 909	40%	85 566	83%	113 723	39%
03/2014	76 996	26%	77 636	55%	108 973	25%
06/2014	87 387	18%	67 818	50%	109 998	18%
09/2014	103 477	13%	81 765	31%	131 119	12%
12/2014	96 537	8%	94 799	20%	135 380	8%
03/2015	116 745	6%	125 124	12%	184 033	6%
06/2015	149 427	4%	180 809	11%	263 180	5%
09/2015	225 912	3%	234 805	6%	380 526	4%
12/2015	1 304 376	7%	533 365	7%	1 560 612	6%
Total	**1 633 532**	**4,7%**	**1 097 482**	**7%**	**2 126 320**	**4%**

Chyba predikce MSEP (prediction standard error)

- Pro oba vývojové trojúhelníky zvlášť
- Portfolio – zohlednění korelace mezi run-off trojúhelníky

Období vzniku	PN run-off 1. partner		PN run-off 2. partner		Portfolio	
	Chyba predikce	Chyba predikce %	Chyba predikce	Chyba predikce %	Chyba predikce	Chyba predikce %
03/2013	0		0		0	
06/2013	58 800		7 576		59 286	
09/2013	100 243	81%	141 235	152%	173 194	80%
12/2013	120 963	65%	147 380	142%	190 664	66%
03/2014	123 547	41%	139 344	98%	185 153	42%
06/2014	168 026	35%	128 103	95%	209 357	34%
09/2014	205 566	25%	155 352	59%	255 453	24%
12/2014	211 850	18%	208 157	44%	297 991	18%
03/2015	266 989	13%	292 019	27%	442 784	14%
06/2015	418 731	12%	522 825	32%	768 476	15%
09/2015	696 225	10%	707 502	19%	1 178 479	11%
12/2015	4 386 721	23%	2 093 363	27%	5 458 238	20%
	(Ctrl)					
Total	**4 579 165**	**13%**	**2 482 493**	**16%**	**5 832 939**	**12%**

Závěr I

- Porovnání výsledků

	PN run-off 1. partner	PN run-off 2. partner	Portfolio
Odhad rezerv	34 593 243	15 404 303	**49 997 546**
Náhodná chyba	4 277 888	2 226 725	**5 431 569**
Chyba odhadu	1 633 532	1 097 482	**2 126 320**
Chyba predikce	4 579 165	2 482 493	**5 832 939**

- Chyba predikce je tvořena z větší části náhodnou chybou
- Celková chyba predikce pro korelované portfolio tvoří 12% rezerv
- Možnost sestrojení intervalů spolehlivosti pro odhad IBNR

Závěr II

- Chyba predikce pro nezávislé a korelované portfolio

	Korelované portfolio	Nezávislé portfolio
Náhodná chyba	5 431 596	4 822 720
Chyba odhadu	2 126 320	1 967 966
Chyba predikce	**5 832 939**	**5 208 793**

- Celková chyba predikce vychází pro porfolio složené z vzájemně korelovaných dílčích porfolií (partner 1, partner 2) vyšší než při předpokladu, že jsou tyto podskupiny nezávislé

- Kovarianční metoda vede k vyšší hodnotě celkové IBNR rezervy

Použitá literatura

- Braun, Ch.: Prediction error of the Chain Ladder Method applied to Correlated Run-off Triangles. Astin Bulletin vol.34, 2004
- Hess, K. Th., Schmidt, K.D., Zocher, M.: Multivariate Loss Prediction in the Multivariate Additive Model, Insiurance, Mathematics and Economics, 2006
- Mack, T.: Distribution-free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates. Astin Bulletin vol. 23, 1993
- Merz, M., Wüthrich, M. W.: Prediction Error of the Multivariate Chain Ladder Reserving Method, Submitted preprint. ETH Zürich, 2007
- Pröhl, C., Schmidt, K.D.: Multivariate Chain Lader. Astin Colloquim. ETH Zürich, 2005

OTÁZKY?

Děkuji za pozornost

marcela.martinu@cardif.com