

Semimarkovský model pro řízení kreditního rizika

Případová studie

Mgr. Markéta Benková

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy

3. prosince 2010

- 1 Definice a parametrizace procesů
 - Úvod
 - Definice Semimarkovských procesů
 - Výpočet pravděpodobnosti výskytu v daném stavu v čase t
- 2 Náhodná veličina doba do změny
 - Různé typy rozdělení
 - Praktické poznatky
- 3 Matice přechodu
 - Vlastnosti matic přechodu
 - Analýza vlastností matic přechodu
 - Změny v období finanční krize
- 4 Příklad použití konceptu
 - Předpoklady
 - Použití matematického aparátu
 - Výsledky
 - Závěry

Výchozí situace

Basel II: zpřesnění výpočtu kapitálového požadavku ke kreditnímu riziku beroucí v potaz interní ratingy

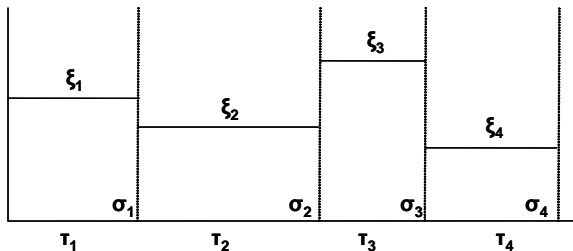
- Způsoby přidělení interního ratingu:
 - Aplikační skóring
 - Behaviorální skóring
- Způsob definice škály interních ratingů
 - konstantní pravděpodobnosti selhání... nebo
 - stabilní rating pro konkrétního dlužníka... nebo
 - zachování určitého rozložení ratingů napříč portfoliem

Zdroj dat pro empirickou analýzu

- Data dodaly tři české banky:
- Dvě z nich používají více či méně behaviorální skóring, jedna používá pouze aplikační skóring
- Všechny banky usilují o konstantní pravděpodobnost selhání v jednotlivých ratingových stupních

Semimarkovské procesy

- Co jsou to semimarkovské procesy?
- Musíme sledovat dvě náhodné veličiny:
 - Doby setrvání ve stavech $\{\tau_n, n = 1, 2, \dots\}$ nám reprezentují doby do změny ratingové kategorie daného dlužníka
 - Posloupnost stavů $\Xi = \{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ vyjadřuje jednotlivé ratingové kategorie, které byly danému dlužníkovi přiděleny.



Definice semimarkovských procesů

Definice

Definice semimarkovského procesu vyžaduje, aby Ξ byl homogenní Markovův řetězec, a dále aby platilo pro libovolné $t_1, t_2 \dots t_n \in [0, \infty)$ a $i_1, i_2 \dots i_n \in I$ reprezentující množinu možných stavů:

$$\begin{aligned} P(\tau_1 \leq t_1, \tau_2 \leq t_2, \dots, \tau_n \leq t_n | \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2, \dots, \xi_n = i_n) \\ = F_{i_1 i_2}(t_1) F_{i_2 i_3}(t_2) \dots F_{i_{n-1} i_n}(t_n), \end{aligned}$$

kde $F_{i_1 i_2}(t) = P(\tau_1 \leq t | \xi_1 = i_1, \xi_2 = i_2)$.

Výpočet pravděpodobnosti výskytu v daném stavu v čase t

Hledáme funkci $p_{ik}(t)$, která vyjadřuje pravděpodobnost výskytu procesu ve stavu k v čase t za předpokladu počátečního stavu i :

$$\begin{aligned} p_{ik}(t) &= P(X_t = k | X_0 = i) = \\ &= \delta_{ik} P(\sigma_1 > t | X_0 = i) + \sum_j \int_0^t f_{ij}(\tau) p_{ij} p_{jk}(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

- První z těchto výrazů vyjadřuje případ, kdy stav k je totožný s počátečním stavem i a během doby t k žádné změně nedojde.
- Druhý výraz je pak vyjádřením případu, kdy před změnou do stavu k došlo ke změně na některý stav j .

Výpočet pravděpodobnosti výskytu v daném stavu v čase t

S konvolucí funkcí f_{ij} a p_{jk} v této rovnici lze dále pracovat pomocí Laplaceovy transformace, která je definována pro lokálně integrovatelné funkce $f(t)$, $t \geq 0$ jako

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Poznámka

Laplaceova transformace konvoluce dvou funkcí je součin Laplaceových transformací těchto dvou funkcí. Laplaceova transformace primitivní funkce je Laplaceovou transformací původní funkce, lomenou s :

$$\left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)^* = \frac{f^*(s)}{s}.$$

Výpočet pravděpodobnosti výskytu v daném stavu v čase t

Výpočet prvního sčítance

$$P(\sigma_1 > t | X_0 = i) = \sum_j \int_t^\infty f_{ij}(\tau) \cdot \Xi p_{ij} d\tau \text{ a tedy}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} P(\sigma_1 > t | X_0 = i) dt &= \int_0^\infty e^{-st} \left(1 - \sum_j \Xi p_{ij} \int_0^t f_{ij}(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \frac{1}{s} - \sum_j \Xi p_{ij} \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f_{ij}(\tau) d\tau dt = \\ &= \frac{1}{s} \left(1 - \sum_j \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s) \right). \end{aligned}$$

Výpočet pravděpodobnosti výskytu v daném stavu v čase t

Výpočet druhého sčítance

$$\left(\int_0^t f_{ij}(\tau) \Xi p_{ij} p_{jk}(t - \tau) d\tau \right)^* = \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s) p_{jk}^*(s).$$

Závěr

Výsledkem je soustava rovnic v Laplaceově transformaci:

$$p_{ik}^*(s) = \delta_{ik} \frac{1}{s} (1 - f_i^*(s)) + \sum_j \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s) p_{jk}^*(s), \text{ kde}$$

$$f_i^*(s) = \sum_j \Xi p_{ij} f_{ij}^*(s)$$

Jak vlastně pracovat s veličinou "doba do změny"?

- 1 Můžeme model lépe přizpůsobit našemu ratingovému procesu
— například jednoleté nebo půlroční revize

Jak vlastně pracovat s veličinou "doba do změny"?

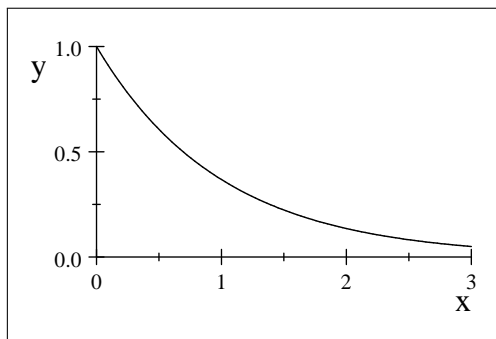
- 1 Můžeme model lépe přizpůsobit našemu ratingovému procesu — například jednoleté nebo půlroční revize
- 2 Můžeme zvýšit nebo naopak snížit pravděpodobnost změny v určitých okamžicích, například těsně po předešlé změně

Jak vlastně pracovat s veličinou "doba do změny"?

- 1 Můžeme model lépe přizpůsobit našemu ratingovému procesu — například jednoleté nebo půlroční revize
- 2 Můžeme zvýšit nebo naopak snížit pravděpodobnost změny v určitých okamžicích, například těsně po předešlé změně
- 3 Zlepšíme tím predikční schopnost modelu zejména pro kratší časová období

Náhodná veličina doba do změny: Exponenciální rozložení

- $f_i(t) = q_i e^{-q_i t}$
- Laplaceova transformace této funkce je $f_i^*(s) = \frac{q_i}{(s+q_i)}$.
- Intenzita doby do změny je konstantní



V takovém případě lze jednoduše ukázat, že dosazením do dříve vypočítaného vzorce získáme retrospektivní Kolmogorovu rovnici:

$$p_{ik}^*(s) = \delta_{ik} \frac{1}{s} \left(1 - \frac{q_i}{(s + q_i)} \right) + \sum_j \Xi p_{ij} \frac{q_i}{(s + q_i)} p_{jk}^*(s).$$

Využijeme vlastnosti, že Laplaceova transformace výrazu $\frac{d}{dt}f(t)$ je $sf^*(s) - f(0)$ a můžeme psát:

$$\frac{d}{dt}p_{ik}(t) = -q_i p_{ik}(t) + \sum_j q_i \Xi p_{ij} p_{jk}(t),$$

což je prakticky zápis retrospektivní Kolmogorovy rovnice, ve které je pouze nutné dosadit

$$q_{ik} = q_i \Xi p_{ik}.$$

Směs gama rozložení

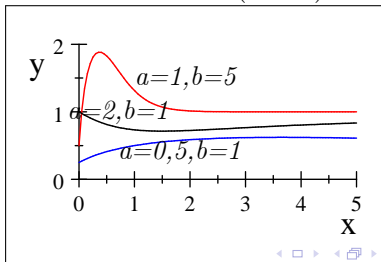
- Hustota je $f(t) = \sum_{k=1}^K w_k \frac{b_k^{n_k}}{(n_k-1)!} t^{n_k-1} e^{-b_k t}$, kde w_k jsou váhy jednotlivých funkcí.
- Laplaceova transformace této funkce je

$$f^*(s) = \sum_{k=1}^K w_k \frac{b_k^{n_k}}{(s + b_k)^{n_k}}.$$

- Intenzita této funkce se řídí intenzitami jednotlivých komponent.
 - například pro směr exponenciálních rozdělení, tzn. $n_k = 1 \quad \forall k$, je intenzita výsledné směsi váženým průměrem intenzit jednotlivých exponenciálních rozdělení
 - pro $t \rightarrow \infty$ je intenzita rovna nejnižšímu parametru b_k :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \frac{w_k t^{n_k-1} e^{-b_k t}}{w_k \frac{1}{b_k} t^{n_k-1} e^{-b_k t}} = b_k = \min \{b_k, k = 1 \dots K\}$$

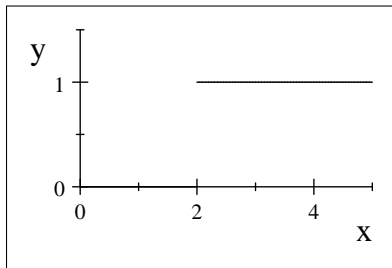
- příklad: Intenzita hustot $w a e^{-at} + (1-w) b^2 t e^{-bt}$, $w = 0,5$:



Diracovo delta

- Ke změně dojde s pravděpodobností 1 v okamžiku \hat{t}
- Distribuční funkce je definována jako

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < \hat{t} \\ 1 & t \geq \hat{t} \end{cases} .$$



Periodická funkce

Proč bychom vůbec měli používat něco takového?

- 1 S určitou periodou dochází k pravidelnému posouzení finančního zdraví dlužníků.
- 2 S určitou periodou dochází k prolongacím existujících úvěrových rámců.

Příklad takové funkce:

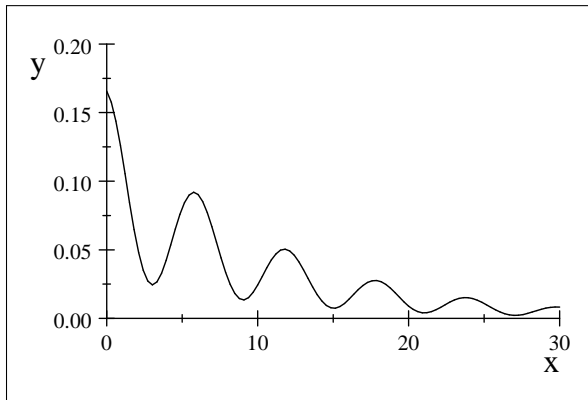
$$f(t) = \frac{1}{k} e^{-at} (\cos bt + c).$$

Laplaceova transformace:

$$f^*(s) = \frac{a(a^2 + b^2)}{(a^2c + b^2c + a^2)} \frac{(a^2c + b^2c + cs^2 + 2as + a^2 + s^2 + 2acs)}{(a + s)(a^2 + 2as + b^2 + s^2)}$$

Periodická funkce

Na následujícím grafu je zakreslena tato funkce pro $b = \frac{\pi}{3}$
a $c = 1,5$ a $a = 0,1$:



Periodická funkce

Problém této funkce: je vhodný pouze pro datové vzorky, u kterých se příliš neliší průměr od směrodatné odchylky.

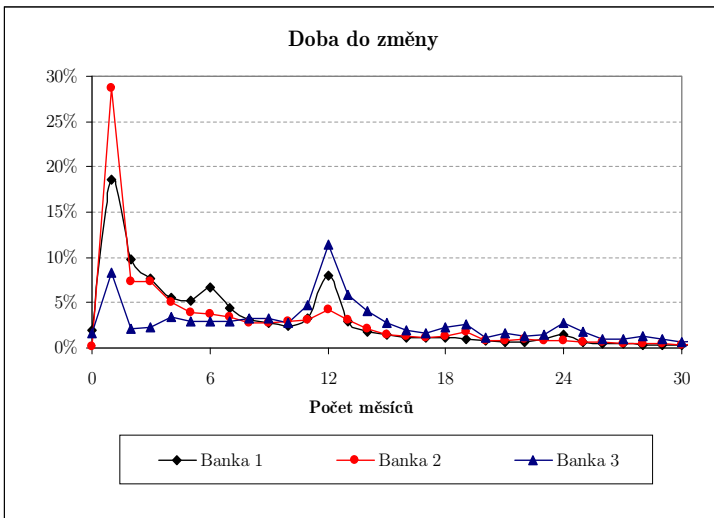
Pro $c \rightarrow \infty$ platí:

$$\begin{aligned} F(c, t) &= 1 - \frac{e^{-at}}{a^2c + b^2c + a^2} (a^2c + b^2c + a^2 \cos bt - ab \sin bt) = \\ &= 1 - e^{-at}, \end{aligned}$$

což je distribuční funkce exponenciálního rozdělení. Dále lze ukázat:

$$\begin{aligned} E\tau &\approx \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) \\ \text{Var } \tau &\approx \frac{1}{a^2} \left(1 + 4 \frac{a^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

Histogram náhodné veličiny doba do změny



Charakter náhodné veličiny doba do změny

- Dlužníci předkládají své hospodářské výsledky v nějaké periodicitě, typicky 1 rok.
- Často je také rating revidován v okamžicích, kdy dochází k prolongaci již existujícího úvěrového rámce.

Závěr

Existují faktory, které náhodnou veličinu doba do změny ovlivňují tak, že zvyšují pravděpodobnost změny v určitých konkrétních momentech. Zejména u kratších časových rámců (například půl roku) se může jednat o velmi podstatnou informaci.

Analýza změny během prvního měsíce

		Procento
Banka 1	Zhoršení ratingu	50%
	Zlepšení ratingu	50%
Banka 2	Zhoršení ratingu	51%
	Zlepšení ratingu	49%
Banka 3	Zhoršení ratingu	80%
	Zlepšení ratingu	20%

	Poslední dvě změny	Procento
Banka 1	Stejně	27%
	Různé	73%
Banka 2	Stejně	26%
	Různé	74%
Banka 3	Stejně	87%
	Různé	13%

Analýza změny během prvního měsíce

Závěr

Evidentně je rozdíl, zda banka aplikuje nebo neaplikuje behaviorální skóring. U Banky 1 a Banky 2 pozorujeme korekce proti směru předchozí změny. Banka 3 naopak vzhledem ke způsobu stanovování ratingových kategorií především pomocí aplikačního skóringu nevrací přidělený rating tak rychle na původní úroveň.

Závislost doby do změny na ratingu

- Analýza byla provedena pomocí lineární regrese.
- Problém těchto výpočtů tkví v tom, že hodnota ratingu je pouze formální proměnná.

Závěr

Nebyla prokázána významná závislost mezi ratingem a délkou doby do změny. Bylo však prokázáno, že doba do změny je tím delší, o co významnější změnu se jedná. Jinými slovy, změna o jednu ratingovou kategorii přijde dříve, než změna o více ratingových kategorií.

Závislost mezi dobou do změny a směrem změny ratingu

	Došlo ke:	Průměrná doba do změny	Počet pozorování
Banka 1	Zhoršení	267	42 653
	Zlepšení	246	36 610
Banka 2	Zhoršení	290	6 637
	Zlepšení	246	5 981
Banka 3	Zhoršení	504	4 030
	Zlepšení	403	2 894

Závislost mezi dobou do změny a směrem změny ratingu

Závěr

Závěr z těchto výpočtů není překvapivý. Lze očekávat, že dlužníci v případě zhoršení své finanční situace mohou skrývat svou skutečnou finanční situaci před bankou, aby zabránili zhoršení podmínek, za kterých jim jsou poskytovány úvěry a naopak. Nicméně rozdíl není tak dramatický, aby nebylo možné považovat systém přidělování interních ratingů za dostatečně efektivní.

Závěr

Rozdíl mezi tím, za jak dlouho dojde ke zlepšení nebo zhoršení je o něco nižší v případě bank používajících behaviorální skóring, než u Banky 3, která jej nepoužívá.

Matice přechodu

Výpočet pomocí vzorce

$$p_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_k n_{ik}}.$$

Vlastnosti:

- Všechny prvky jsou nezáporné.
- Součet všech prvků v daném řádku je roven 1.

Vlastnosti matic přechodu

Matice přechodu mezi ratingovými kategoriemi mají ještě zpravidla tyto další vlastnosti:

- Prvky na diagonále jsou nulové.
- Kategorie v selhání je absorpčním stavem.
- Pravděpodobnost selhání je vždy nižší pro lepší ratingové kategorie.
- Pravděpodobnost změny na nový rating je tím nižší, o co je nový rating odlišnější (řádková monotonie vůči diagonále).
- Pravděpodobnost migrace do daného ratingu by měla být větší pro dlužníky s méně odlišným ratingem (sloupcová monotonie vůči diagonále).

Obecné poznámky k těmto maticím

- Velmi málo pozorování je k dispozici pro dlužníky s velmi dobrým ratingem. Proto vypočítané pravděpodobnosti přechodu nemohou být brány za směrodatné.
- Kategorie v selhání ve skutečnosti nejsou absorpční. Otázkou je, zda se při tak vysokém počtu pozorování nemůže jednat například o administrativní nebo datovou chybu.
- Empirické matice Banky 1 a Banky 2 není ani monotónní vůči diagonále, matice Banky 3 tuto vlastnost splňuje

Analýza markovské vlastnosti

Použijeme:

Věta

Jestliže náhodný vektor $(n_{i1} \dots n_{ik})^T$ má multinomické rozdělení o parametrech $M(n_{i\cdot}, p_{i1} \dots p_{ik})$, kde $n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^k n_{ij}$, pak Pearsonova statistika

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - n_{i\cdot} \cdot p_{ij})^2}{n_{i\cdot} \cdot p_{ij}},$$

má při $n \rightarrow \infty$ asymptotické rozdělení χ_{k-1}^2 .

Tuto analýzu můžeme zjednodušit tím, že budeme zkoumat, zda nová ratingová kategorie nezávisí na tom, zda byla předchozí ratingová kategorie výsledkem zhoršení nebo zlepšení situace daného dlužníka.

Analýza markovské vlastnosti

Postup: porovnáme pravděpodobnosti **zlepšení ratingové kategorie** pro dvě situace:

- 1 předchozí změnou bylo zlepšení,
- 2 předchozí změnou bylo zhoršení.

Tvrzení

Pokud má platit markovská vlastnost, tzn. nová změna závisí pouze na předchozím ratingu, měly by obě pravděpodobnosti být shodné, nemělo by tedy záviset na tom, zda původní ratingová kategorie byla výsledkem zlepšení nebo zhoršení finanční situace dlužníka.

Výsledek pro Banku 2

Pravděpodobnost zlepšení

Ratingový stupeň	Předchozí změnou bylo zhoršení	Předchozí změnou bylo zlepšení	Rozdíl mezi změnami
3	26%	61%	-35%
4	7%	40%	-33%
5	34%	73%	-39%
6	13%	42%	-29%
7	22%	54%	-32%
8	32%	70%	-39%
9	37%	62%	-25%
10	23%	47%	-24%
11	30%	82%	-53%
12	26%	58%	-32%
13	29%	69%	-40%
Průměr hodnot rozdílů			-35%
Směrodatná odchylka			8%

Výsledek pro Banku 3

Pravděpodobnost zlepšení

Ratingový stupeň	Předchozí změnou bylo zhoršení	Předchozí změnou bylo zlepšení	Rozdíl mezi změnami
3	22%	9%	13%
4	33%	17%	16%
5	36%	25%	11%
6	39%	29%	11%
7	49%	34%	15%
Průměr hodnot rozdílů			13%
Směrodatná odchylka			2%

Závěr

V tomto případě záleží na tom, zda banka provozuje v nějaké formě behaviorální skóring nebo ne. V případě Bank 1 a 2, které deklarují používání behaviorálního skóringu, dochází po zhoršení ratingu častěji k jeho zlepšení a obráceně. Naopak u Banky 3, která behaviorální skóring nepoužívá, je pozorován opačný trend.

Závěr

Aby banka na daném segmentu dlužníků byla schopna dosáhnout dostatečného výnosu v porovnání s alokovaným kapitálem, je nucena výrazně uzpůsobit svou cenovou politiku stanovování výše úroků právě systému interních ratingů. Tím může vytvářet účinný tlak na firmy, které potřebují financovat svůj chod z cizích zdrojů, aby tomuto přizpůsobily své chování.

Počty změn v období finanční krize

V následující tabulce je ukázáno, kolik změn ratingových kategorií za jeden měsíc evidují jednotlivé banky. Je zajímavé, že tento poměr se pro různé banky mění:

	Počet změn v období ekonomické stability za měsíc	Počet změn v období finanční krize za měsíc	Poměr
Banka 1	917	1 782	1,9
Banka 2	251	145	0,6
Banka 3	125	316	2,5

Následující tabulka ukazuje nárůst počtu dlužníků v selhání v období finanční krize:

	Počet selhání v období ekonomické stability za měsíc	Počet selhání v období finanční krize za měsíc	Poměr
Banka 1	6	38	6,4
Banka 2	10	21	2,0
Banka 3	4	14	3,1

Matice přechodu v období finanční krize

Porovnány byly empirické matice přechodu z doby ekonomické stability a finanční krize.

Závěr

Závěr z této analýzy byl zcela v souladu s očekáváním. Až na dvě výjimky, ve všech případech je během období ekonomické stability vyšší pravděpodobnost zlepšení, než během finanční krize. Dále rozdíl mezi pravděpodobnostmi zlepšení v různých obdobích jsou vyšší pro horší ratingy, což je opět očekávaný výsledek — není překvapením, že lepší dlužníci si udrží svou stabilitu i během finanční krize.

Příklad použití konceptu

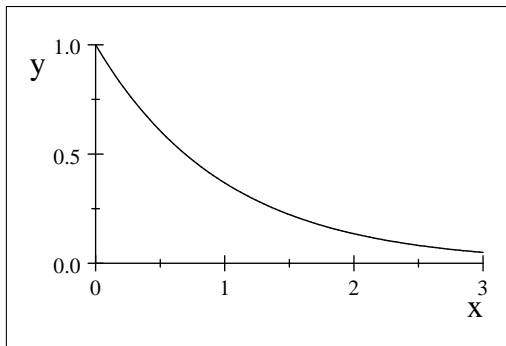
Model používající data společnosti Moodys

- 1 Problém byl zjednodušen existencí pouze tří stavů: investičního stupně (1), spekulativního stupně (2) a defaultního stupně (d).
- 2 Z webových stránek společnosti Moodys byla zjištěna matice přechodu s horizontem jeden rok:

$$P_{\text{Moodys}} = \begin{pmatrix} 98,98\% & 0,99\% & 0,03\% \\ 3,46\% & 92,74\% & 3,80\% \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 3 Pomocí teorie markovských řetězců byla získána matice intenzit a díky ní i matice přechodu v semimarkovském procesu.

- 1 Zvolíme hustotu náhodné veličiny **Doba do změny**:
exponenciální rozdělení



Sestavíme soustavu rovnic:

$$p_{11}^*(s) - p_{12} \frac{a_1}{a_1 + s} p_{21}^*(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \left(p_{12} \frac{a_1}{a_1 + s} + p_{1d} \frac{a_1}{a_1 + s} \right) \right)$$

$$p_{12}^*(s) - p_{12} \frac{a_1}{a_1 + s} p_{22}^*(s) = 0$$

$$p_{21}^*(s) - p_{21} \frac{a_2}{a_2 + s} p_{11}^*(s) = 0$$

$$p_{22}^*(s) - p_{21} \frac{a_2}{a_2 + s} p_{12}^*(s) = \frac{1}{s} \left(1 - \left(p_{21} \frac{a_2}{a_2 + s} + p_{2d} \frac{a_2}{a_2 + s} \right) \right)$$

$$0 = p_{1d}^*(s) - p_{12} \frac{a_1}{a_1 + s} p_{2d}^*(s) - p_{1d} \frac{a_1}{a_1 + s} \frac{1}{s}$$

$$0 = p_{2d}^*(s) - p_{21} \frac{a_2}{a_2 + s} p_{1d}^*(s) - p_{2d} \frac{a_2}{a_2 + s} \frac{1}{s}$$

...kterou vyřešíme a invertujeme Laplaceovu transformaci. Tím získáme pravděpodobnosti přechodu mezi jednotlivými možnostmi, zde například pro investiční kategorii:

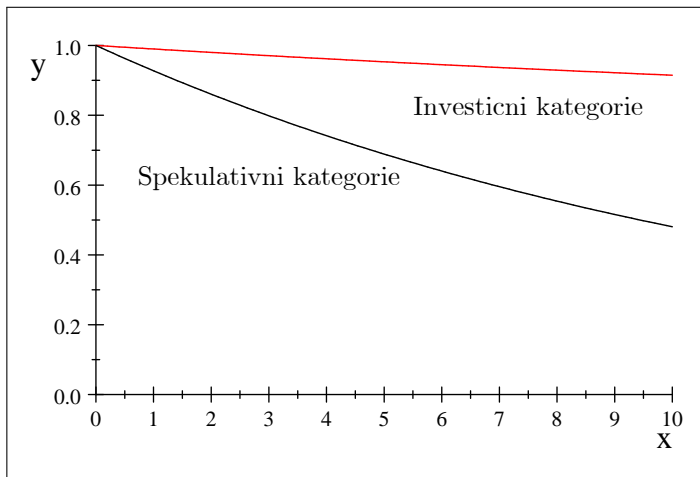
$$p_{11}(t) = e^{-0,043t} (\cosh 0,0379t + 0,86 \sinh 0,0379t)$$

$$p_{12}(t) = 0,273e^{-0,043t} \sinh 0,0379t$$

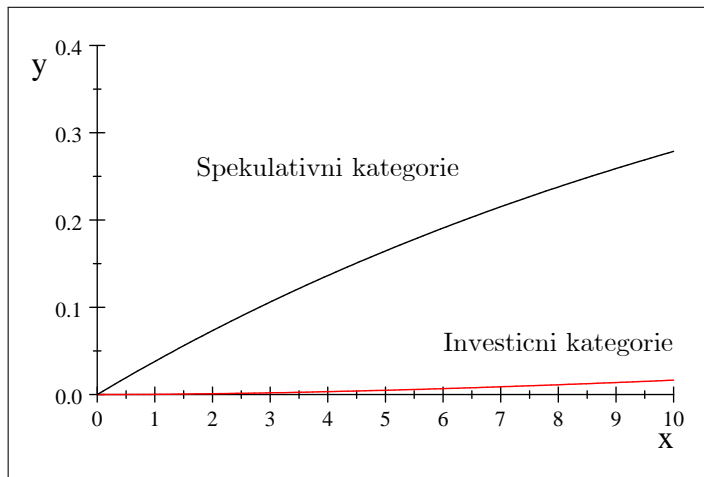
$$p_{1d}(t) = 1 - e^{-0,043t} (\cosh 0,0379t + 1,13 \sinh 0,0379t)$$

...což vypadá lépe zaneseno do grafu

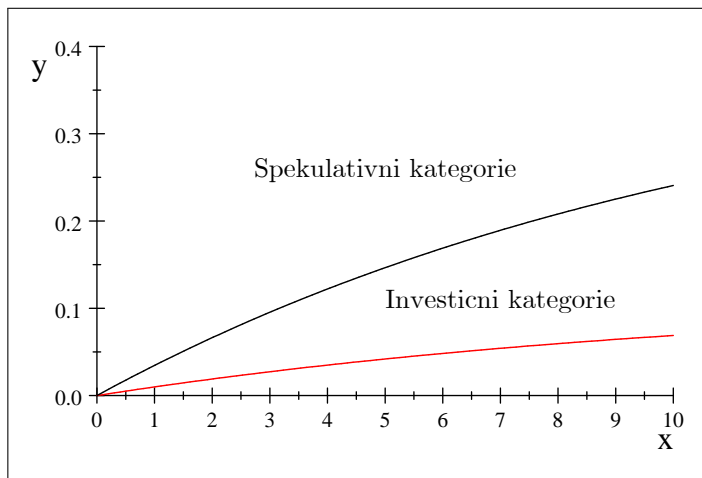
Pravděpodobnost setrvání ve stávajícím ratingu



Pravděpodobnost selhání



Pravděpodobnost přechodu do opačného ratingu



Co lze říci závěrem?

- 1 Chování ratingů záleží na systému, který je vyprodukoval. Jiné chování mají systémy založené na behaviorálním skóringu, jiné chování ty založené na aplikačním skóringu.
- 2 Některé často zmiňované předpoklady evidentně neplatí. Jedná se zejména o neplatnost Markovské vlastnosti.
- 3 Dalším mnohdy mylně předpokládaným faktem je výskyt série zhoršení nebo zlepšení.
- 4 Doba do změny není vždy exponenciálně rozdělená. Pravděpodobnost změny se logicky zvyšuje v okamžicích, kdy dochází k revizím existujících ratingů.

Děkuji za pozornost.
Ráda zodpovím Vaše dotazy.

Markéta Benková
marketabenkova@seznam.cz