Kreditní rating a jeho modelování pomocí markovských procesů

Dana Němcová

27. 11. 2015

Allianz

Osnova

- Úvod
- Metoda maximální věrohodnosti
- EM algoritmus
- Monte Carlo Markov Chain

- Přestávka

- Úvěrový rating
- Aplikace

Osnova

- **Úvod**
- Metoda maximální věrohodnosti
- EM algoritmus
- Monte Carlo Markov Chain

- Přestávka

- Úvěrový rating
- Aplikace

Úvod – Markovské řetězce

- Markovský řetězec s diskrétním časem:

Nechť $T = \{0,1,\dots\}$ a nechť $\{X_t, t \in T\}$ je náhodná posloupnost nezáporných celočíselných veličin s hodnotami v množině $S \subseteq \mathbb{N}_0$, kde S je taková, že

$$i \in S \iff \exists t: P(X_t = i) > 0.$$

Řekneme, že $\{X_t, t \in T\}$ je markovský řetězec s diskrétním časem a množinou stavů S, jestliže pro každé $t \in T$ a $i, j, i_{t-1}, \dots, i_0 \in S$ taková, že

$$P(X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) > 0,$$

platí:

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = j | X_t = i).$$

- Pravděpodobnosti přechodu: $p_{ij}(n,m) = P(X_m = j | X_n = i)$.
- Homogenní markovský řetězec: $p_{ij}(n,m) = p_{ij}(m-n)$,

$$p_{ij}(1) = p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i).$$

- Matice pravděpodobností přechodu: $\boldsymbol{P} = \left(p_{ij}\right)_{i,j \in S}$.

Úvod – Markovské řetězce

- Markovský řetězec se spojitým časem:

Náhodný proces $\{X(t), t \geq 0\}$ celočíselných nezáporných náhodných veličin s množinou stavů $S \subseteq \mathbb{N}_0$ se nazývá markovský řetězec se spojitým časem, jestliže pro všechna $i, j, i_0, \dots, i_n \in S$ a $0 < t_0 < \cdots < t_n < t < s$ platí

$$P(X(s) = j | X(t) = i, X(t_n) = i_n, \dots, X(t_0) = i_0) = P(X(s) = j | X(t) = i).$$

- Pravděpodobnosti přechodu: $p_{ij}(t, s) = P(X(s) = j | X(t) = i)$.
- Homogenní markovský proces: $p_{ij}(t, s) = p_{ij}(s - t)$.
- Matice pravděpodobností přechodu: $\boldsymbol{P}(h) = \left(p_{ij}(h)\right)_{i,j \in S}$.
- Matice intenzit přechodu: $\boldsymbol{Q} = \left(q_{ij}\right)_{i,j \in S}$.

$$q_{ij} = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ij}(h)}{h}, \qquad i, j \in S, i \neq j,$$

$$q_{ii} = \lim_{h \to 0+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}, \qquad i \in S.$$

- Celková intenzita: $q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii}$.

Osnova

- Úvod
- **Metoda maximální věrohodnosti**
- EM algoritmus
- Monte Carlo Markov Chain

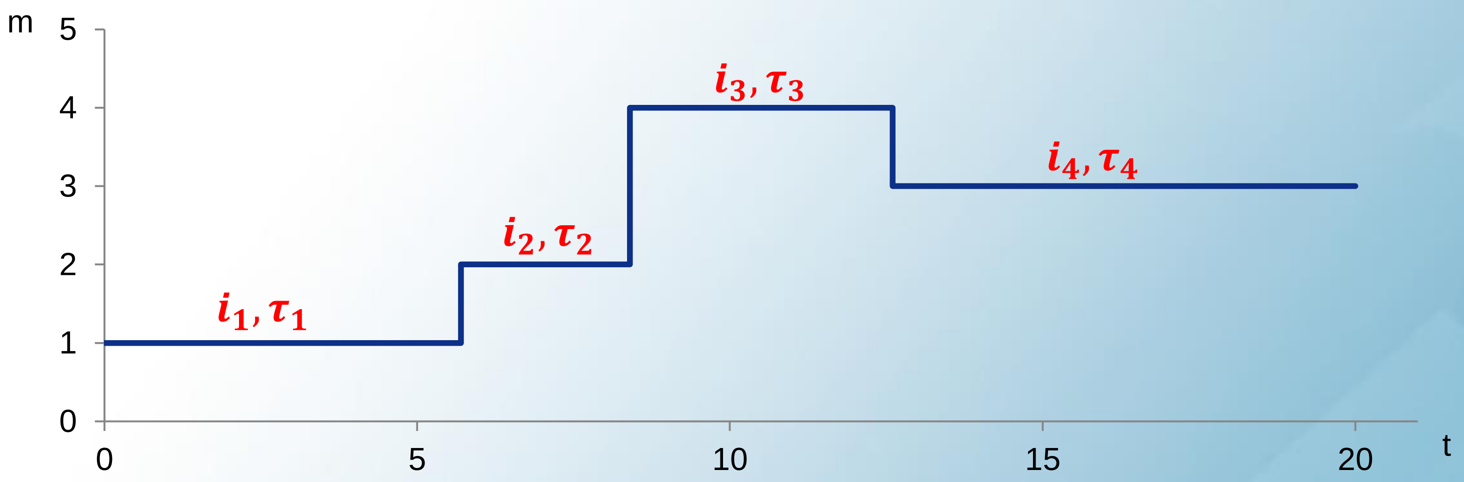
- Přestávka

- Úvěrový rating
- Aplikace

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Předpokládejme homogenní markovský proces se spojitým časem, $\{X(t), t \geq 0\}$, s konečnou množinou stavů $\{1, \dots, m\}$ a maticí intenzit přechodu $\boldsymbol{Q}$.

Pozorujeme spojitou trajektorii $\{x(t), t \in [0, \tau]\}$.



Základní charakteristiky pozorování:

- $N_{ij}(\tau),\ i, j = 1, \dots, m, \mathrm{i} \neq j$ — počet přeskoků ze stavu i do stavu j,
- $R_i(\tau),\ i = 1, \dots, m$ — celkový čas strávený ve stavu i.

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Metoda vybírá parametr, který je nejpravděpodobnější vzhledem k pozorovaným datům.

Schéma spojité trajektorie:

$$i_1(\tau_1) \to i_2(\tau_2) \to \cdots \to i_n(\tau_n).$$

- Doba setrvání $\tau_k \sim Exp\left(q_{i_k}\right)$.
- Pravděpodobnost přeskoku po čase τ_k je $\frac{q_{i_k i_{k+1}}}{q_{i_k}}$.

Věrohodnostní funkce pro pozorovanou trajektorii na intervalu $[0,\tau]$ při dané matici intenzit přechodu:

$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) =$

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Metoda vybírá parametr, který je nejpravděpodobnější vzhledem k pozorovaným datům.

Schéma spojité trajektorie:

$$i_1(\tau_1) \to i_2(\tau_2) \to \cdots \to i_n(\tau_n)$$

- Doba setrvání $\tau_k \sim Exp\left(q_{i_k}\right)$.
- Pravděpodobnost přeskoku po čase τ_k je $\frac{q_{i_k i_{k+1}}}{q_{i_k}}$.

Věrohodnostní funkce pro pozorovanou trajektorii na intervalu $[0, \tau]$ při dané matici intenzit přechodu:

$$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = q_{i_1} e^{-\tau_1 q_{i_1}}$$

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Metoda vybírá parametr, který je nejpravděpodobnější vzhledem k pozorovaným datům.

Schéma spojité trajektorie:

$$i_1(\tau_1) \to i_2(\tau_2) \to \cdots \to i_n(\tau_n)$$

- Doba setrvání $\tau_k \sim Exp\left(q_{i_k}\right)$.
- Pravděpodobnost přeskoku po čase τ_k je $\frac{q_{i_k i_{k+1}}}{q_{i_k}}$.

Věrohodnostní funkce pro pozorovanou trajektorii na intervalu $[0, \tau]$ při dané matici intenzit přechodu:

$$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = q_{i_1} e^{-\tau_1 q_{i_1}} \frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}}$$

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Metoda vybírá parametr, který je nejpravděpodobnější vzhledem k pozorovaným datům.

Schéma spojité trajektorie:

$$i_1(\tau_1) \to i_2(\tau_2) \to \cdots \to i_n(\tau_n)$$

- Doba setrvání $\tau_k \sim Exp\left(q_{i_k}\right)$.
- Pravděpodobnost přeskoku po čase τ_k je $\frac{q_{i_k i_{k+1}}}{q_{i_k}}$.

Věrohodnostní funkce pro pozorovanou trajektorii na intervalu $[0, \tau]$ při dané matici intenzit přechodu:

$$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = q_{i_1} e^{-\tau_1 q_{i_1}} \frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}} \cdot q_{i_2} e^{-\tau_2 q_{i_2}} \frac{q_{i_2 i_3}}{q_{i_2}}$$

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Metoda vybírá parametr, který je nejpravděpodobnější vzhledem k pozorovaným datům.

Schéma spojité trajektorie:

$$i_1(\tau_1) \to i_2(\tau_2) \to \cdots \to i_n(\tau_n)$$

- Doba setrvání $\tau_k \sim Exp\left(q_{i_k}\right)$.
- Pravděpodobnost přeskoku po čase τ_k je $\frac{q_{i_k i_{k+1}}}{q_{i_k}}$.

Věrohodnostní funkce pro pozorovanou trajektorii na intervalu $[0, \tau]$ při dané matici intenzit přechodu:

$$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = q_{i_1} e^{-\tau_1 q_{i_1}} \frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}} \cdot q_{i_2} e^{-\tau_2 q_{i_2}} \frac{q_{i_2 i_3}}{q_{i_2}} \cdot \ \ldots \ \cdot q_{i_{n-1}} e^{-\tau_{n-1} q_{i_{n-1}}} \frac{q_{i_{n-1} i_n}}{q_{i_{n-1}}} \cdot e^{-\tau_n q_{i_n}}$$

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Metoda vybírá parametr, který je nejpravděpodobnější vzhledem k pozorovaným datům.

Schéma spojité trajektorie:

$$i_1(\tau_1) \to i_2(\tau_2) \to \cdots \to i_n(\tau_n)$$

- Doba setrvání $\tau_k \sim Exp\left(q_{i_k}\right)$.
- Pravděpodobnost přeskoku po čase τ_k je $\frac{q_{i_k i_{k+1}}}{q_{i_k}}$.

Věrohodnostní funkce pro pozorovanou trajektorii na intervalu $[0, \tau]$ při dané matici intenzit přechodu:

$$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = q_{i_1} e^{-\tau_1 q_{i_1}} \frac{q_{i_1 i_2}}{q_{i_1}} \cdot q_{i_2} e^{-\tau_2 q_{i_2}} \frac{q_{i_2 i_3}}{q_{i_2}} \cdot \ \ldots \ \cdot q_{i_{n-1}} e^{-\tau_{n-1} q_{i_{n-1}}} \frac{q_{i_{n-1} i_n}}{q_{i_{n-1}}} \cdot e^{-\tau_n q_{i_n}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} q_{ij}^{N_{ij}(\tau)} e^{-q_{ij} R_i(\tau)} .$$

Metoda maximální věrohodnosti – spojité pozorování

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$l_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = \log L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} \big(N_{ij}(\tau) \log q_{ij} - q_{ij} R_i(\tau) \big) \,.$$

Odhad metodou maximální věrohodnosti:

$$\widehat{q_{ij}}^{ML} = \frac{N_{ij}(\tau)}{R_i(\tau)}, \qquad i, j = 1, \dots, m, i \neq j.$$

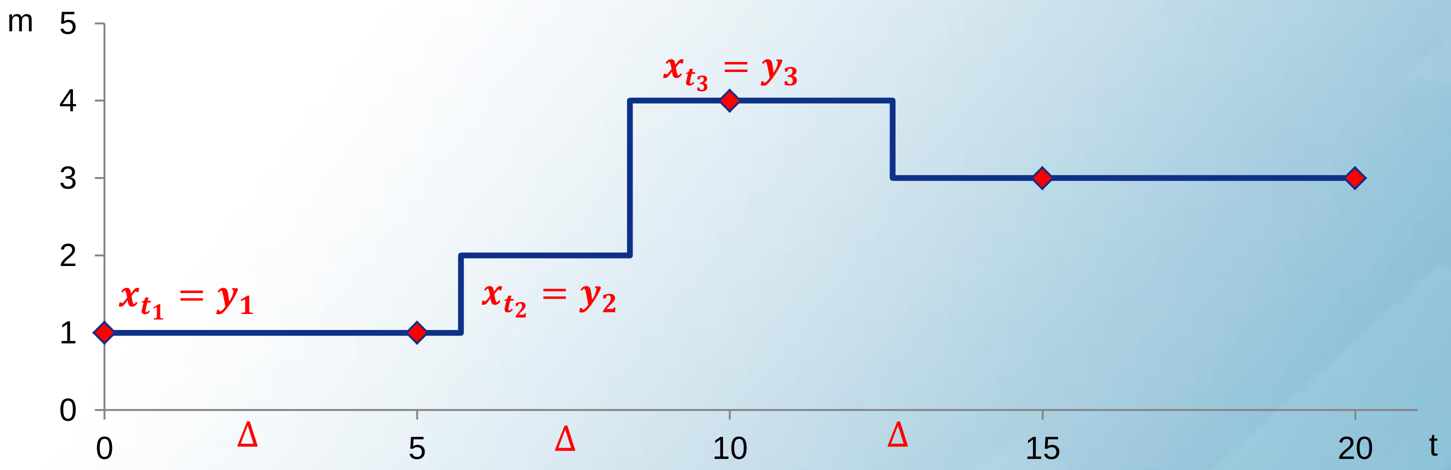
Odhad dostáváme pouze po taková i, pro která je $R_i(\tau) > 0$.

Diagonální prvky dopočítáme podle definice matice intenzit přechodu.

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Stále pracujeme s homogenním Markovským řetězcem se spojitým časem, $\{X(t), t \geq 0\}$, s konečnou množinou stavů $\{1, \dots, m\}$ a maticí intenzit přechodu $\boldsymbol{Q}$.

Pozorujeme body $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}\}$ na intervalu $[0, \tau]$, ekvidistantně vzdálené s krokem Δ.



Homogenní MŘ $\{X(t), t \geq 0\}$, matice $\boldsymbol{Q}$ → Homogenní MŘ $\{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$, matice $\boldsymbol{P}$

Základní charakteristiky pozorování:

- $K_{ij}(n),\ i, j = 1, \dots, m$ počet přeskoků ze stavu i do stavu j.

Allianz

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Schéma diskrétní trajektorie:

$$y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$$

Věrohodnostní funkce pro pozorované hodnoty na intervalu $[0, \tau]$:

$$L_n(\boldsymbol{P}) = p_{y_1 y_2} \cdot p_{y_1 y_2} \cdot \cdots \cdot p_{y_{n-1} y_n} = \prod_{i,j=1}^{m} {p_{ij}}^{K_{ij}(n)} .$$

Logaritmická věrohodnostní funkce:

$$l_n(\boldsymbol{P}) = \sum_{i,j=1}^{m} K_{ij}(n) \log p_{ij} .$$

Odhad metodou maximální věrohodnosti:

$$\widehat{p_{ij}} = \frac{K_{ij}(n)}{\sum_{j=1}^{m} K_{ij}(n)}, \qquad i,j = 1, \dots, m.$$

Máme odhad matice pravděpodobností přechodu $\widehat{\boldsymbol{P}}$. Jak získat odhad matice intenzit přechodu $\widehat{\boldsymbol{Q}}$?

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Výpočet $\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{P}(\Delta) = \exp(\Delta \boldsymbol{Q}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k \boldsymbol{Q}^k}{k!}, \qquad (*)$$

Výpočet $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$:

Lze z diskrétně napozorovaných dat (jednoznačně) definovat markovský řetězec se spojitým časem? Jedná se o tzv. imbedding problem – „problém s vnořením".

Kingman, J.F.C: The imbedding problem for finite Markov chains, Z. Wahrscheinlichketstheorie, 1:14-24, 1962.

Označme $\mathcal{P} = \{\exp(\Delta \boldsymbol{Q})\,; \boldsymbol{Q} \in \mathcal{Q}\}$, kde $\mathcal{Q}$ je množina všech matic, splňujících definici matice intenzit přechodu.

- Pokud $\widehat{\boldsymbol{P}} \in \mathcal{P}$, pak $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ získáme jako řešení rovnice $(*)$ a navíc $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ je maximálně věrohodný odhad.
- Pokud $\widehat{\boldsymbol{P}} \notin \mathcal{P}$, pak řešení rovnice $(*)$ buď neexistuje, nebo vypočtená $\widehat{\boldsymbol{Q}}$ nesplňuje definici matice intenzit přechodu.

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Pokud existuje stav j dosažitelný ze stavu i, a zároveň $p_{ij} = 0$, pak neexistuje matice intenzit řešící rovnici $(*)$.

Israel, R.B., Rosenthal, J.S., Wei, J.Z.: Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices with applications to credit ratings, 2001, Mathematical Finance 11, 245-265.

Moody's, matice jednoletých pravděpodobností přechodu, 1970-2010:

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	D
Aaa	0.904	0.089	**0.006**	0.000	**0.000**	0.000	0.000	0.000	0.000
Aa	0.010	0.901	0.084	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.001	0.028	0.909	0.055	**0.005**	0.001	0.000	0.000	0.001
Baa	0.000	0.002	0.048	0.894	0.044	0.008	0.002	0.000	0.002
Ba	0.000	0.001	0.004	0.062	0.834	0.080	0.006	0.001	0.012
B	0.000	0.000	0.001	0.004	0.053	0.822	0.064	0.007	0.047
Caa	0.000	0.000	0.000	0.002	0.005	0.094	0.684	0.047	0.168
Ca-C	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.028	0.107	0.435	0.426
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

Average One-Year Transition Rates, 1970-2010, http://efinance.org.cn/cn/FEben/Corporate%20Default%20and%20Recovery%20Rates,1920-2010.pdf.

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Diagonální úprava

- záporné prvky mimo diagonálu nahradíme nulou,
- diagonální prvek v každém řádku dopočítáme podle definice matice intenzit přechodu.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	D
Aaa	-0.1015	0.0986	0.0021	-0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aa	0.0110	-0.1062	0.0929	0.0016	-0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0009	0.0309	-0.0985	0.0609	0.0042	0.0007	-0.0001	0.0000	0.0010
Baa	0.0000	0.0014	0.0532	-0.1155	0.0507	0.0068	0.0021	-0.0002	0.0015
Ba	0.0000	0.0010	0.0026	0.0717	-0.1865	0.0965	0.0036	0.0009	0.0103
B	0.0000	-0.0001	0.0010	0.0023	0.0640	-0.2043	0.0849	0.0078	0.0421
Caa	0.0000	0.0000	-0.0001	0.0022	0.0023	0.1245	-0.3926	0.0854	0.1784
Ca-C	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0005	0.0049	0.0334	0.1941	-0.8423	0.6105
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Diagonální úprava

- záporné prvky mimo diagonálu nahradíme nulou,
- diagonální prvek v každém řádku dopočítáme podle definice matice intenzit přechodu.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	D
Aaa	-0.1015	0.0986	0.0021	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aa	0.0110	-0.1062	0.0929	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0009	0.0309	-0.0985	0.0609	0.0042	0.0007	0.0000	0.0000	0.0010
Baa	0.0000	0.0014	0.0532	-0.1155	0.0507	0.0068	0.0021	0.0000	0.0015
Ba	0.0000	0.0010	0.0026	0.0717	-0.1865	0.0965	0.0036	0.0009	0.0103
B	0.0000	0.0000	0.0010	0.0023	0.0640	-0.2043	0.0849	0.0078	0.0421
Caa	0.0000	0.0000	0.0000	0.0022	0.0023	0.1245	-0.3926	0.0854	0.1784
Ca-C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0049	0.0334	0.1941	-0.8423	0.6105
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Metoda maximální věrohodnosti – diskrétní pozorování

Diagonální úprava

- záporné prvky mimo diagonálu nahradíme nulou,
- diagonální prvek v každém řádku dopočítáme podle definice matice intenzit přechodu.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	Ca-C	D
Aaa	-0.1007	0.0986	0.0021	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Aa	0.0110	-0.1065	0.0929	0.0016	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
A	0.0009	0.0309	-0.0986	0.0609	0.0042	0.0007	0.0000	0.0000	0.0010
Baa	0.0000	0.0014	0.0532	-0.1157	0.0507	0.0068	0.0021	0.0000	0.0015
Ba	0.0000	0.0010	0.0026	0.0717	-0.1865	0.0965	0.0036	0.0009	0.0103
B	0.0000	0.0000	0.0010	0.0023	0.0640	-0.2044	0.0849	0.0078	0.0421
Caa	0.0000	0.0000	0.0000	0.0022	0.0023	0.1245	-0.3927	0.0854	0.1784
Ca-C	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0049	0.0334	0.1941	-0:8428	0.6105
D	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Osnova

- Úvod
- Metoda maximální věrohodnosti
- **EM algoritmus**
- Monte Carlo Markov Chain

- Přestávka

- Úvěrový rating
- Aplikace

EM algoritmus - princip

Expectation – Maximization.

Postupnými iteracemi zpřesňujeme maximálně věrohodný odhad.

Historie

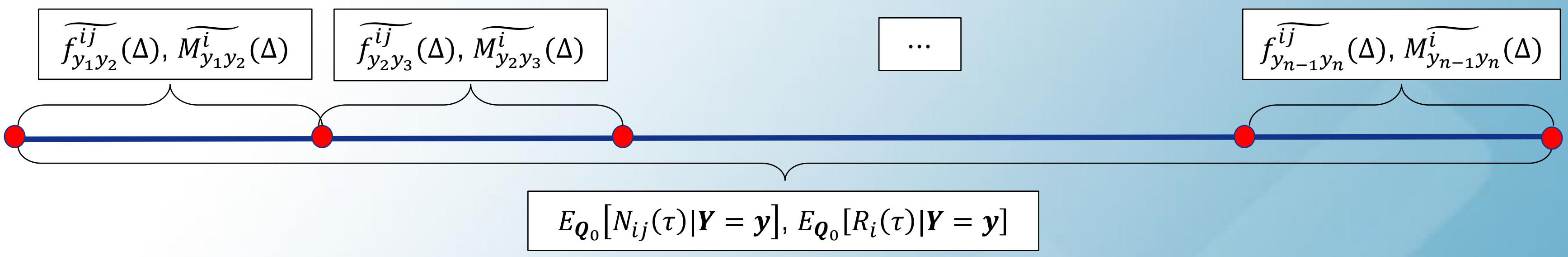
- 1977 detailní popis a pojmenování,
- 1983 analýza konvergence.

EM algoritmus – E krok

Q-funkce je střední hodnota logaritmické věrohodnostní funkce hledaného parametru podmíněná diskrétním pozorováním.

MMV: $l_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = \log L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} \left(N_{ij}(\tau) \log q_{ij} - q_{ij} R_i(\tau) \right),$

$$E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[l_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \right] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} \log q_{ij}\, E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[N_{ij}(\tau) | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \right] - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j \neq i} q_{ij} E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[R_i(\tau) | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \right].$$



Pro vzdálenost mezi jednotlivými pozorováními Δ můžeme vyjádřit:

$$E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[N_{ij}(\tau) | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \right] = \sum_{k=1}^{n-1} E_{Q_0}\left[N_{ij}(\Delta) | Y_1 = y_k, Y_2 = y_{k+1} \right] = \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{f_{y_k y_{k+1}}^{ij}}(\Delta),$$

$$E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[R_i(\tau) | \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y} \right] = \sum_{k=1}^{n-1} E_{Q_0}\left[R_i(\Delta) | Y_1 = y_k, Y_2 = y_{k+1} \right] = \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{M_{y_k y_{k+1}}^{i}}(\Delta).$$

EM algoritmus – E krok

Obecně:

$$\widetilde{M_{kl}^{i}}(t) = E_{\boldsymbol{Q}_0}[R_i(t)\boxed{|X(t) = l},X(0) = k],$$

$$\widetilde{f_{kl}^{ij}}(t) = E_{\boldsymbol{Q}_0}[N_{ij}(t)\boxed{|X(t) = l},X(0) = k].$$

Úpravou dostaneme:

$$M_{kl}^{i}(t) = E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[R_i(t)\boxed{1_{(X(t)=l)}}|X(0) = k\right] = E_{\boldsymbol{Q}_0}[R_i(t)|X(t) = l, X(0) = k] \cdot$$
$$\cdot P(X(t) = l|X(0) = k) = \widetilde{M_{kl}^{i}}(t) \cdot p_{kl}(t) = \widetilde{M_{kl}^{i}}(t) \cdot e_k^T \exp(t\boldsymbol{Q})\, e_l,$$

$$f_{kl}^{ij}(t) = E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[N_{ij}(t)\boxed{1_{(X(t)=l)}}|X(0) = k\right] = E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[N_{ij}(t)|X(t) = l, X(0) = k\right] \cdot$$
$$\cdot P(X(t) = l|X(0) = k) = \widetilde{f_{kl}^{ij}}(t) \cdot p_{kl}(t) = \widetilde{f_{kl}^{ij}}(t) \cdot e_k^T \exp(t\boldsymbol{Q})\, e_l,$$

1_A… identfikátor jevu A,

e_k… k-tý jednotkový vektor.

EM algoritmus – E krok

- Výpočet pomocí diferenciálních rovnic

$$\frac{d}{dt} M_{kl}^{i}(t) = \sum_{h=1}^{m} M_{kh}^{i}(t) q_{hl} + \exp(t\boldsymbol{Q})_{kl}\, \delta_{li}, \qquad M_{kl}^{i}(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} f_{kl}^{ij}(t) = \sum_{h=1}^{m} f_{kh}^{ij}(t) q_{hl} + q_{ij} \exp(t\boldsymbol{Q})_{ki}\, \delta_{lj}, \qquad f_{kl}^{ij}(0) = 0.$$

Bladt, M., Sorensen, M.: Statistical inference for discretely observed Markov jump process, 2005, Journal of Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), Vol. 67, No. 3, 395-410.

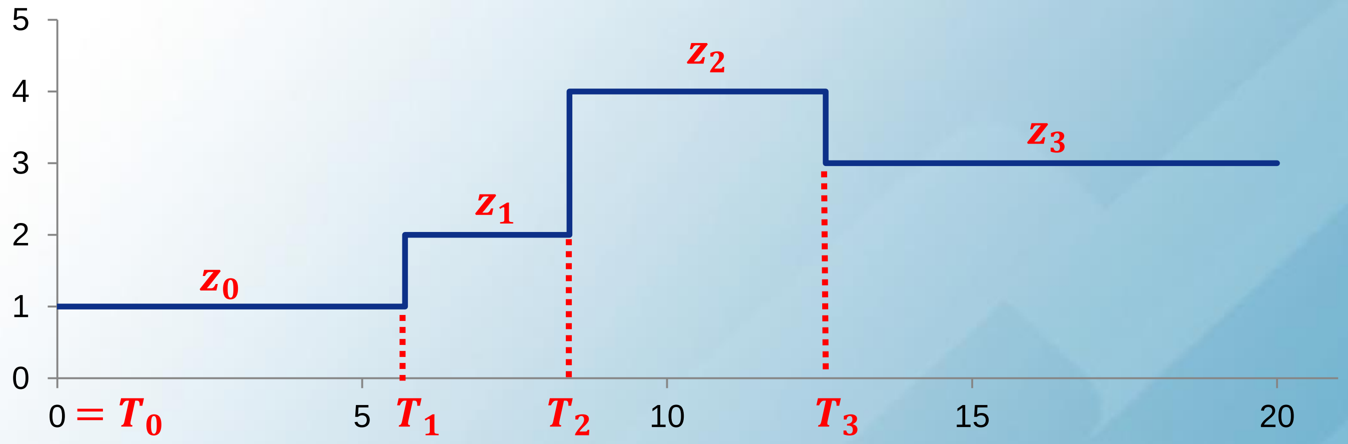
EM algoritmus – E krok

- Výpočet pomocí uniformizační metody

Definujeme parametr $\lambda \geq max\{q_i, i = 1, \dots, m\}$ a matici $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} + \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{Q}$. Použijeme aproximaci

$$X(t) = z_k, \qquad T_k \leq t \leq T_{k+1},$$

kde $T_0 = 0, T_1, T_2, \dots$ jsou časy událostí Poissonova procesu s parametrem $\lambda > 0$ a $\{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ je markovský řetězec s diskrétním časem a pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{B}$.



EM algoritmus – E krok

Hledané veličiny pak můžeme spočítat pomocí vzorců:

$$M_{kl}^{i}(t) = e^{-\lambda t}\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{h=0}^{n}\left(\boldsymbol{B}^{h}\right)_{ki}(\boldsymbol{B}^{n-h})_{il},$$

$$f_{kl}^{ij}(t) = q_{ij}e^{-\lambda t}\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{h=0}^{n}\left(\boldsymbol{B}^{h}\right)_{ki}(\boldsymbol{B}^{n-h})_{il}.$$

Hobolt, A., Jensen, J. L.: Summary statistics for end-point conditioned continuous-time Markov chains, 2011, Journal of Applied Probability, Vol. 48, No. 4, 911-924.

EM algoritmus – M krok

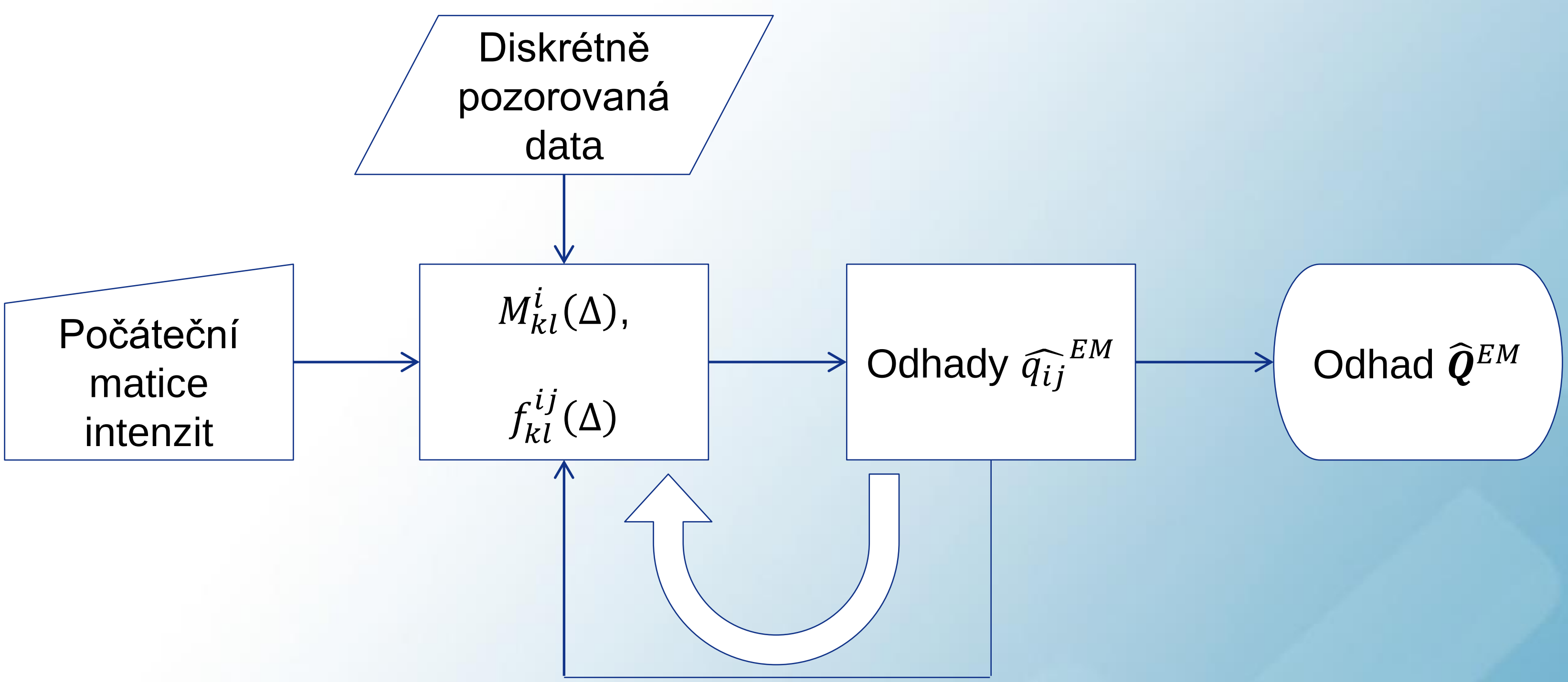
Maximalizace Q-funkce $E_{Q_0}\left[l_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q})|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\right]$ vzhledem k matici intenzit $\boldsymbol{Q}$:

$$\widehat{q_{ij}}^{ML} = \frac{N_{ij}(\tau)}{R_i(\tau)}, \qquad i,j = 1, \dots, m, i \neq j,$$

$$\widehat{q_{ij}}^{EM} = \frac{E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[N_{ij}(\tau)|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\right]}{E_{\boldsymbol{Q}_0}\left[R_i(\tau)|\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}\right]}, \qquad i,j = 1, \dots, m, i \neq j.$$

Diagonální prvky dopočítáme podle definice matice intenzit přechodu.

EM algoritmus – diagram



Podmínky zastavení procesu:

- Na základě odhadnuté matice

$$\|\boldsymbol{Q}_{k+1} - \boldsymbol{Q}_k\| < \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

- Na základě věrohodnostní funkce:

$$|L_n(\boldsymbol{Q}_{k+1}) - L_n(\boldsymbol{Q}_k)| < \varepsilon, \qquad k \in \mathbb{N}_0.$$

EM algoritmus – konvergence a rozptyl

Monotonie věrohodnostní funkce:

$$L_n(\boldsymbol{Q}_{k+1}) \geq L_n(\boldsymbol{Q}_k).$$

Každý nový odhad matice intenzit přechodu je tedy minimálně tak věrohodný jako ten poslední.

Podmínky konvergence posloupnosti $\{\boldsymbol{Q}_k\}$ lze nalézt v uvedeném článku.

McLachlan, G. J., Krishnan, T.: The EM Algorithm and Extensions, 1997, New Yersey, Wiley Series on Probability and Statistics, Second Edition, 1-84, ISBN 978-0-471-20170-0.

Osnova

- Úvod
- Metoda maximální věrohodnosti
- EM algoritmus
- **Monte Carlo Markov Chain**
- Přestávka
- Úvěrový rating
- Aplikace

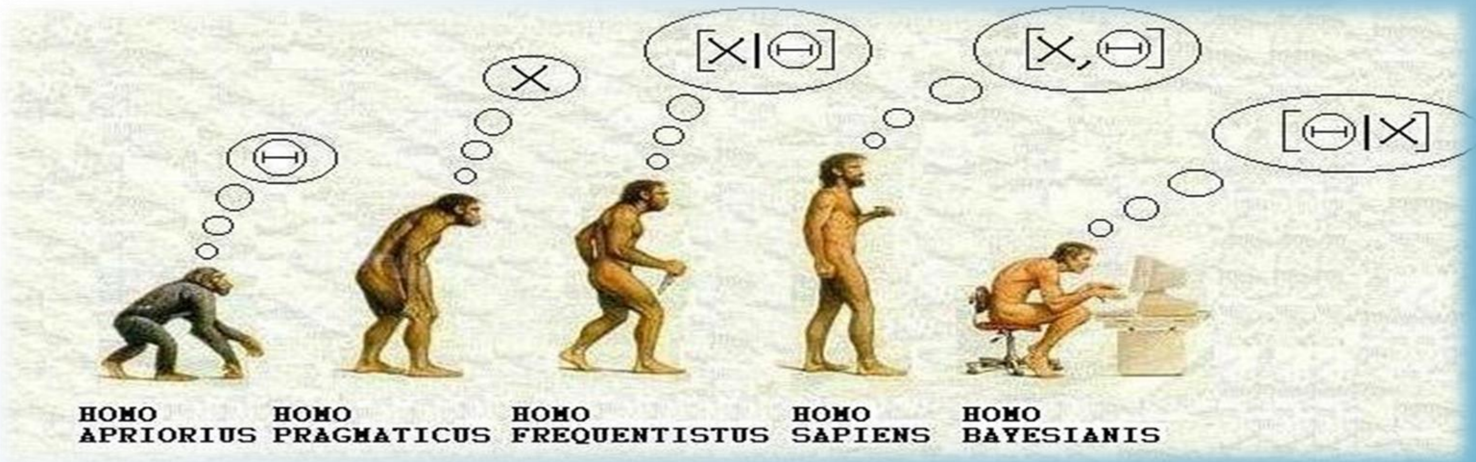
MCMC algoritmus – bayesovský přístup

Bayesova věta:

Nechť $\boldsymbol{X}$ je náhodný vektor s pravděpodobnostním rozdělením daným hustotou $f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})$, kde $\boldsymbol{\theta}$ je náhodný vektorový parametr. Rozdělení parametru $\boldsymbol{\theta}$ je určeno hustotou $g(\boldsymbol{\theta})$. Pak pro podmíněnou hustotu $h(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$ parametru $\boldsymbol{\theta}$ při daném $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$ platí:

$$h(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})g(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})g(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}},$$

je-li jmenovatel různý od nuly. V opačném případě položíme tuto hustotu rovnu nule.



MCMC algoritmus – bayesovský přístup

$$g(\boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\text{+ pozorovaná data}} h(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})$$

Apriorní hustota — Aposteriorní hustota

Bayesova věta:

$$h(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) = \frac{f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})g(\boldsymbol{\theta})}{\int f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})g(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}},$$

tedy $h(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x}) \propto f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})g(\boldsymbol{\theta})$, kde $\propto$ značí vztah „rovno až na normující konstantu“.

MCMC algoritmus – postup

Aplikace na model markovského řetězce se spojitým časem:

- Parametr $\boldsymbol{Q}$ s rozdělením $g(\boldsymbol{Q})$.
- Spojité pozorování x na $[0,\tau]$ s podmíněným rozdělením $L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q})$

$$h(\boldsymbol{Q}|x) = \frac{L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q})g(\boldsymbol{Q})}{\int L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q})g(\boldsymbol{Q})d\boldsymbol{Q}}.$$

Zvolíme systém apriorních hustot:

$$g(\boldsymbol{Q}) \propto \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} q_{ij}^{\alpha_{ij}-1} e^{-q_{ij}\beta_i},$$

kde $\alpha_{ij}, \beta_i > 0, i, j = 1, \dots, m$.

Jedná se o sdružené rozdělení nezávislých $q_{ij} \sim \Gamma(\beta_i, \alpha_{ij})$.

Bladt, M., Sorensen, M.: Statistical inference for discretely observed Markov jump process, 2005, Journal of Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), Vol. 67, No. 3, 395-410.

MCMC algoritmus – postup

Apriorní hustota:

$$g(\boldsymbol{Q}) \propto \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} q_{ij}^{\alpha_{ij}-1} e^{-q_{ij}\beta_i}.$$

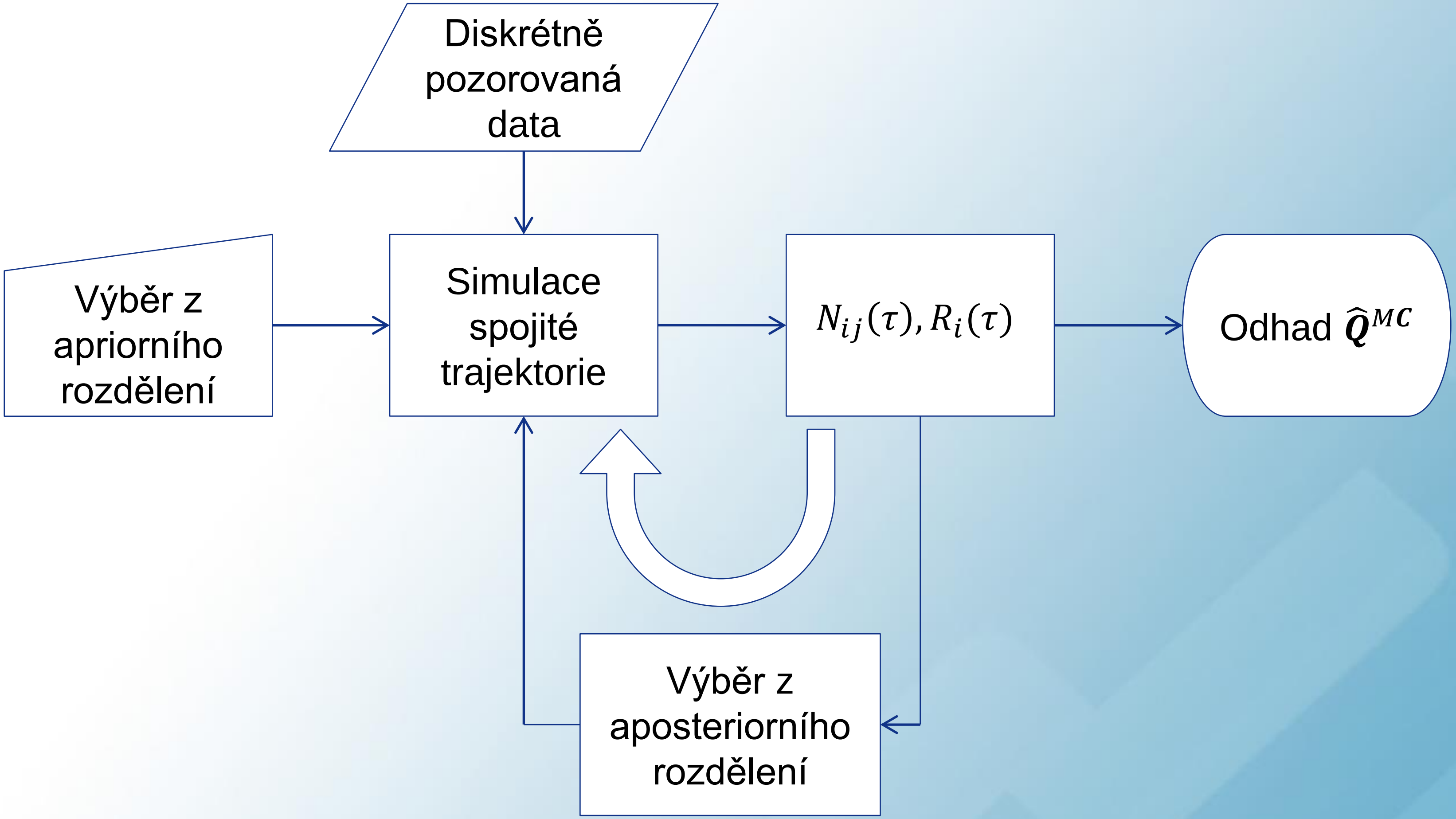
Věrohodnostní funkce:

$$L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} q_{ij}^{N_{ij}(\tau)} e^{-q_{ij}R_i(\tau)}.$$

Aposteriorní hustota:

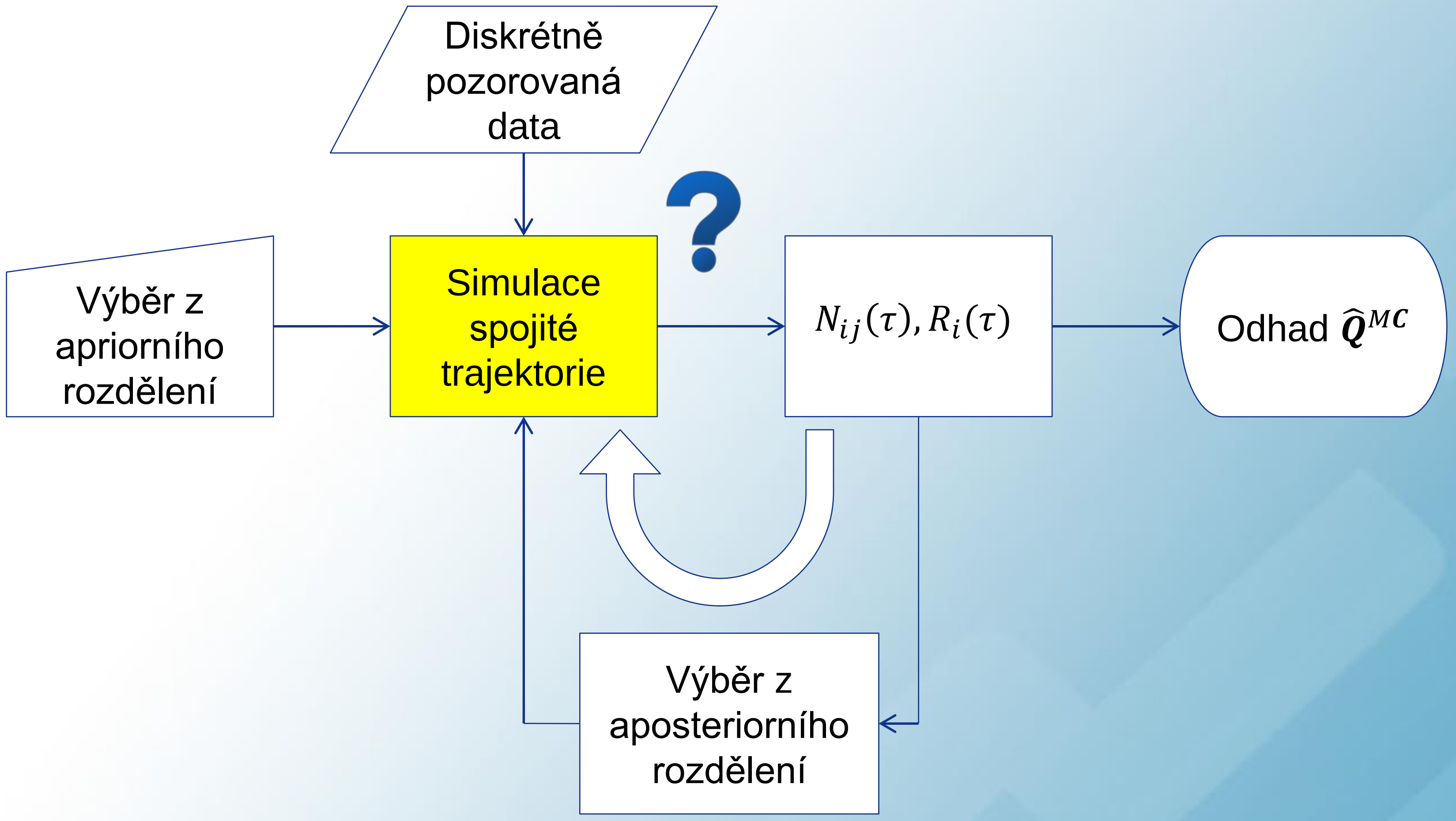
$$h(\boldsymbol{Q}|x) \propto L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q}) g(\boldsymbol{Q}) \propto \prod_{i=1}^{m} \prod_{j \neq i} q_{ij}^{(N_{ij}(\tau)+\alpha_{ij})-1} e^{-q_{ij}(R_i(\tau)+\beta_i)}.$$

MCMC algoritmus – diagram



Získáme posloupnost odhadů $\{\boldsymbol{Q}_k, X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, kde k značí pořadové číslo iterace. Dostatečný počet iterací (10 000).

MCMC algoritmus – diagram



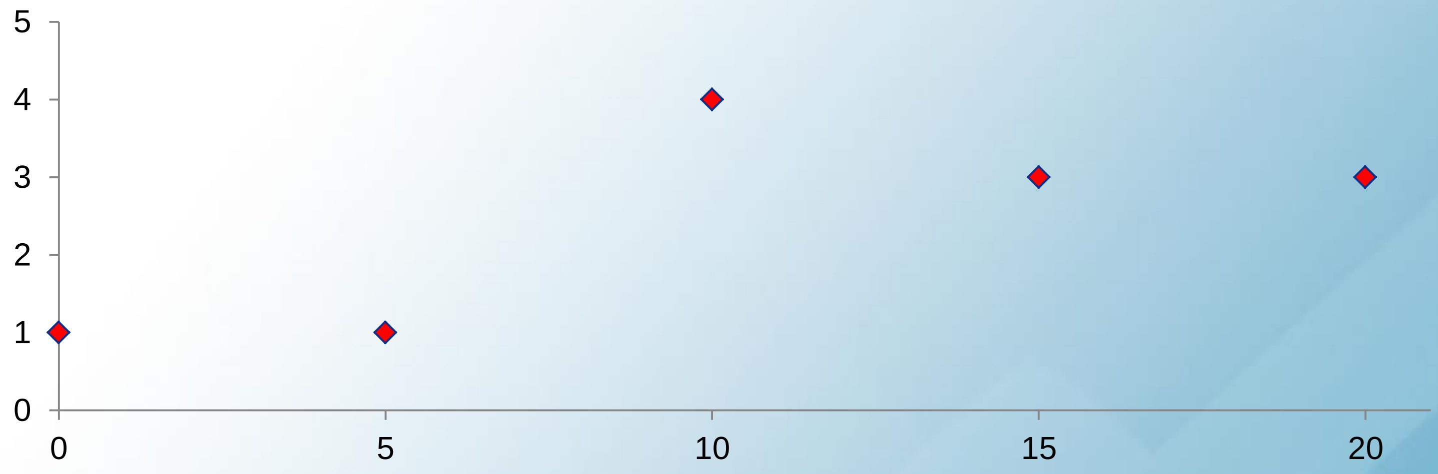
Získáme posloupnost odhadů $\{\boldsymbol{Q}_k, X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$, kde k značí pořadové číslo iterace. Celkový počet simulací musí být dostatečně velký, např. 10 000.

MCMC algoritmus – zamítací simulační metoda

Pomocí matice intenzit $\boldsymbol{Q}$ a diskrétních pozorovaných dat $\{y_1, \dots, y_n\}$ potřebujeme simulovat spojitou trajektorii Markovského řetězce $\{X(t), t \in [0, \tau]\}$ takovou, že

$$X(t_i) = y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Použijeme zamítací metodu na každý z intervalů $[t_i, t_{i+1}], i = 1, \dots, n-1$.

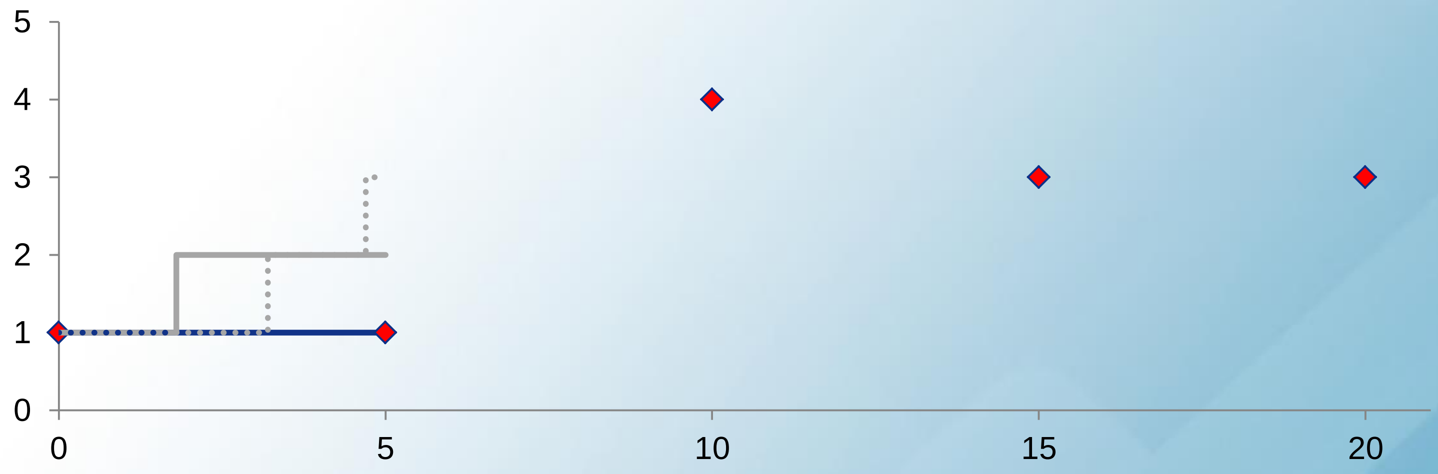


MCMC algoritmus – zamítací simulační metoda

Pomocí matice intenzit $\boldsymbol{Q}$ a diskrétních pozorovaných dat $\{y_1, \dots, y_n\}$ potřebujeme simulovat spojitou trajektorii Markovského řetězce $\{X(t), t \in [0, \tau]\}$ takovou, že

$$X(t_i) = y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Použijeme zamítací metodu na každý z intervalů $[t_i, t_{i+1}], i = 1, \dots, n-1$.

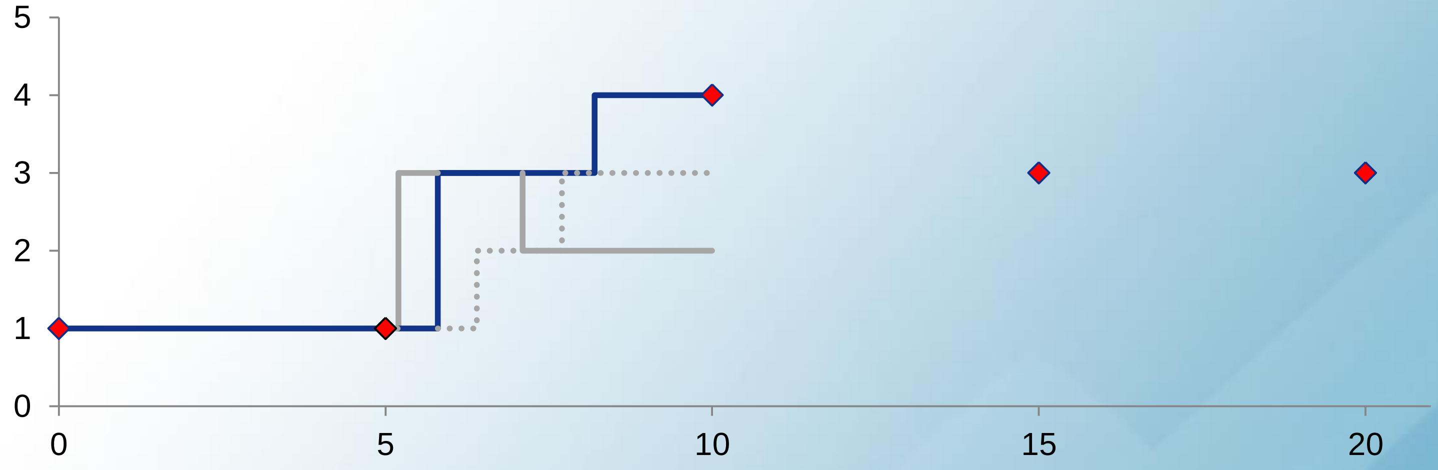


MCMC algoritmus – zamítací simulační metoda

Pomocí matice intenzit $\boldsymbol{Q}$ a diskrétních pozorovaných dat $\{y_1, \dots, y_n\}$ potřebujeme simulovat spojitou trajektorii Markovského řetězce $\{X(t), t \in [0, \tau]\}$ takovou, že

$$X(t_i) = y_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Použijeme zamítací metodu na každý z intervalů $[t_i, t_{i+1}], i = 1, \dots, n-1$.



MCMC algoritmus – odhad a konvergence

Pro odstranění vlivu volby apriorního rozdělení vynecháme v posloupnost odhadů $\{\boldsymbol{Q}_k, X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ prvních K členů (tzv. burn-in period).

Limitní rozdělení markovského procesu $\{\boldsymbol{Q}_k, X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ má hustotu

$$h(\boldsymbol{Q}|x)\, f(x|\boldsymbol{y}) = L_\tau^{(c)}(\boldsymbol{Q})\, g(\boldsymbol{Q})\, f(x|\boldsymbol{y}).$$

Posloupnost $\{\boldsymbol{Q}_k, X^{(k)}\}_{k>K}$ je striktně stacionární a ergodická. Aposteriorní střední hodnotu můžeme aproximovat:

$$E[\boldsymbol{Q}|x] \sim \frac{1}{M}\sum_{i=K+1}^{K+M} \boldsymbol{Q}_i\,.$$

Odhad matice intenzit:

$$\widehat{\boldsymbol{Q}}^{MC} = \frac{1}{M}\sum_{i=K+1}^{K+M} \boldsymbol{Q}_i\,.$$

Osnova

- Úvod
- **Metoda maximální věrohodnosti**
- **EM algoritmus**
- **Monte Carlo Markov Chain**

- Přestávka

- Úvěrový rating
- Aplikace

Přestávka

Osnova

- Úvod
- Metoda maximální věrohodnosti
- EM algoritmus
- Monte Carlo Markov Chain

- Přestávka

- **Úvěrový rating**
- Aplikace

Úvěrový rating – definice

Úvěrový rating (credit rating)

- Pravděpodobnost, že půjčka (cenný papír) bude správně a včas splacena.
- Velký vliv na ochotu bank půjčovat (kupovat závazky), na stanovení podmínek půjčky (úrokové sazby, lhůty, pojištění rizik).
- Zveřejňován ratingovými agenturami – komplexní rozbor známých rizik, odhad schopnosti dostát včas a v plné výši závazkům.

- ➢ Pro jednotlivé emise (cenné papíry).
- ➢ Pro emitenty (společnosti, státy).

- ➢ Krátkodobý rating (short-term) – v rámci jednoho roku.
- ➢ Dlouhodobý rating (long-term) – přes delší časový horizont.

Úvěrový rating – ratingové agentury

- 19. století – expanze do západních oblastí USA, zvětšování vzdáleností mezi investorem a dlužníkem.
- 1837 – finanční krize v USA, agentury hodnotící obchodníky a jejich schopnost dostát závazkům (Lewis Tappan, NYC, 1841).
- 1909 – hodnocení obligací železničních společností od Johna Moodyho,
- 1913 – John Moody hodnotí dluhopisy podniků veřejných služeb a průmyslových společností, poprvé je použit systém označení písmeny.

- Velká trojka
  - 1914 Moody‘s Investor Service
  - 1916 Poor‘s Publishing Company
  - 1922 Standard Statistics Company
  - 1924 Fitch Publishing Company

$\left.\begin{array}{l}\text{Poor‘s Publishing Company}\\ \text{Standard Statistics Company}\end{array}\right\}$ 1941, Standard & Poor‘s

Úvěrový rating – princip ratingu

- Hodnotící kritéria
  - Kvantitativní – kapitálová struktura, zisk, likvidita, hospodářský růst státu, inflace, míra zdanění.
  - Kvalitativní – řízení společnosti, vztahy s obchodními partnery, řízení rizik, strategie, konkurenční prostředí, politická stabilita, platební a rozpočtová kázeň.
- Agentury musí disponovat dostatečnou kapacitou pro analýzu a musí být nezávislé.
- Využívání neveřejných informací o společnostech.

- Označení písmeny (A-D, 1-3, +/-).
- Investiční / spekulativní (neinvestiční) stupně ratingu.
- Slovní popis situace objektu, odhad průměrného rizika nesplacení a další charakteristiky.
- Hodnocení má velký dopad na postavení subjektu na trhu.

Úvěrový rating – investiční stupně

Moody's		S&P		Fitch		Stupeň
Dlouhé období	**Krátké období**	**Dlouhé období**	**Krátké období**	**Dlouhé období**	**Krátké období**	
Aaa	P-1	AAA	A-1+	AAA	F1+	Investiční stupně
Aa1		AA+		AA+		
Aa2		AA		AA		
Aa3		AA-		AA-		
A1		A+	A-1	A+	F1	
A2		A		A		
A3	P-2	A-	A-2	A-	F2	
Baa1		BBB+		BBB+		
Baa2	P-3	BBB	A-3	BBB	F3	
Baa3		BBB-		BBB-		

https://www.moodys.com/,
http://www.standardandpoors.com/en_EU/web/guest/home,
https://www.fitchratings.com/.

Úvěrový rating – spekulativní stupně

<table>
<tr><th colspan="2">Moody's</th><th colspan="2">S&P</th><th colspan="2">Fitch</th><th rowspan="2">Stupeň</th></tr>
<tr><th>Dlouhé období</th><th>Krátké období</th><th>Dlouhé období</th><th>Krátké období</th><th>Dlouhé období</th><th>Krátké období</th></tr>
<tr><td>Ba1</td><td rowspan="13">Not Prime Subprime</td><td>BB+</td><td rowspan="6">B</td><td>BB+</td><td rowspan="6">B</td><td rowspan="13">Spekulativní stupně</td></tr>
<tr><td>Ba2</td><td>BB</td><td>BB</td></tr>
<tr><td>Ba3</td><td>BB-</td><td>BB-</td></tr>
<tr><td>B1</td><td>B+</td><td>B+</td></tr>
<tr><td>B2</td><td>B</td><td>B</td></tr>
<tr><td>B3</td><td>B-</td><td>B-</td></tr>
<tr><td>Caa1</td><td>CCC+</td><td rowspan="4">C</td><td>CCC+</td><td rowspan="4">C</td></tr>
<tr><td>Caa2</td><td>CCC</td><td>CCC</td></tr>
<tr><td>Caa3</td><td>CCC-</td><td>CCC-</td></tr>
<tr><td>Ca</td><td>CC</td><td>CC</td></tr>
<tr><td rowspan="3">C</td><td>C</td><td rowspan="3">D</td><td>C</td><td rowspan="3">D</td></tr>
<tr><td>CI</td><td rowspan="2">D</td></tr>
<tr><td>D</td></tr>
</table>

Úvěrový rating – rating státu

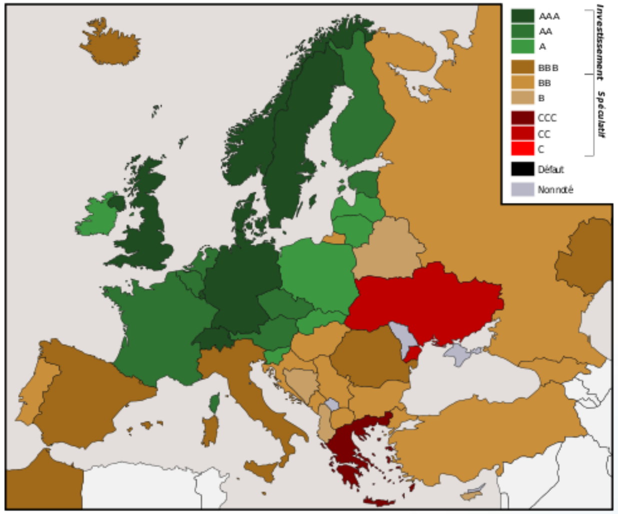
- Míra rizika pro investování v dané zemi.
- Vyhledávaný potenciálními zahraničními investory.
- Zohledňuje politické, ekonomické riziko.
- Rating je strop pro hodnocení jednotlivých emitentů v rámci státu.

	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Moody's	Ba1	Baa3	Baa2	Baa1	Baa1	Baa1	Baa1	Baa1	Baa1	Baa1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1	A1
S&P	–	BBB	BBB+	A	A	A	A-	A-	A-	A-	A-	A-	A-	A-	A-	A	A	A	A	AA-	AA-	AA-	AA-	AA-
Fitch	–	–	–	A-	A-	BBB+	BBB+	BBB+	BBB+	BBB+	BBB+	A-	A-	A	A	A	A+	A+	A+	A+	A+	A+	A+	A+

Foreign Currency Long-Term Sovereign Debt Ratings, 1.10.2015,
https://www.cnb.cz/cs/o_cnb/mezinarodni_vztahy/rating/

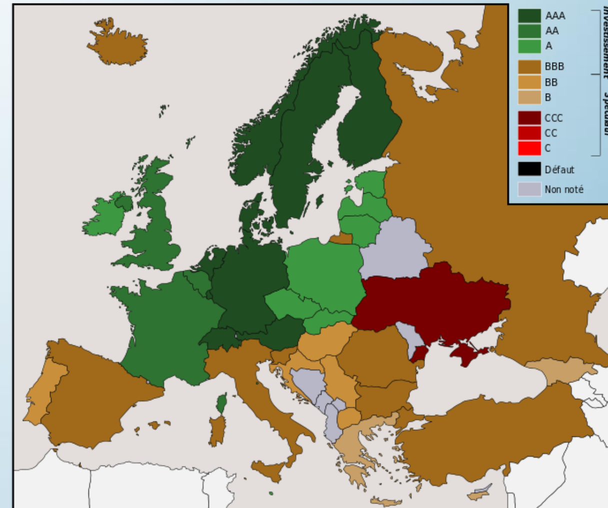
Allianz

Úvěrový rating – rating státu



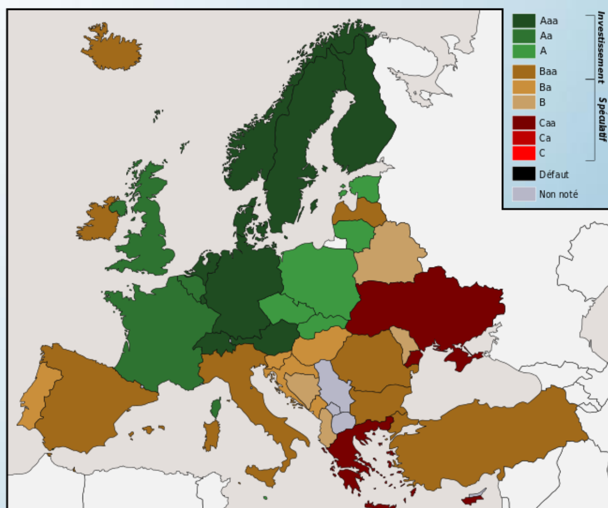
Standard & Poor's
Notation financière à long terme des États européens
14/07/2015
Source : S&P (http://www.standardandpoors.com/home/en/eu)

Moody's



Fitch Ratings
Notation financière à long terme des États européens
16/08/2014
Source : Fitch Ratings (http://www.fitchratings.com/index_fitchratings.cfm)

STANDARD & POOR'S



Moody's
Notation financière à long terme des États européens
18/01/2014
Source : Moody's (http://www.moodys.com/)

FitchRatings

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_countries_by_credit_rating

Úvěrový rating – využití

- Investoři
  - rozšíření množství investičních možností,
  - nezávislé a snadno použitelné hodnocení relativního úvěrového rizika,
  - roste efektivita trhu, snižují se náklady (např. pro analýzu emitentů).
- Emitenti
  - nezávislé ověření jejich schopnosti dostát závazkům,
  - úspěšná emise musí mít alespoň jedno ratingové hodnocení,
  - zjednodušení přístupu na kapitálový trh.
- Investiční banky a makléři
  - výpočet rizika svého portfolia,
  - vlastní hodnocení porovnávají s hodnocení ratingových agentur.
- Regulatorní orgány
  - kontrolují používání pouze vybraných ratingů.

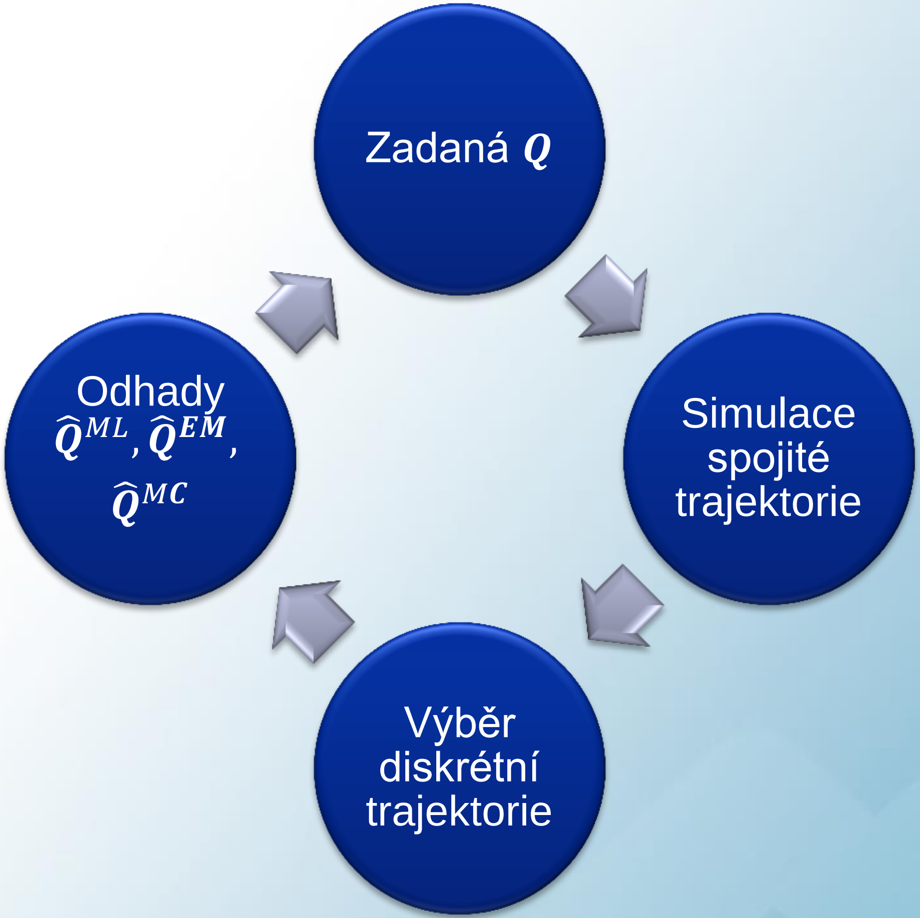
Osnova

- Úvod
- Metoda maximální věrohodnosti
- EM algoritmus
- Monte Carlo Markov Chain

- Přestávka

- Úvěrový rating
- **Aplikace**

Aplikace – postup



Aplikace – vstupní data

Christensen, J., Hansen, E., Lando, D.: Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities, 2004, Journal of Banking and Finance 28 (5), 2575-2602.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	D
Aaa	-0.071	0.066	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Aa	0.009	-0.123	0.115	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.001	0.033	-0.117	0.080	0.003	0.000	0.000	0.000
Baa	0.001	0.001	0.088	-0.163	0.068	0.004	0.001	0.000
Ba	0.000	0.000	0.009	0.185	-0.293	0.096	0.003	0.000
B	0.000	0.000	0.002	0.015	0.093	-0.246	0.124	0.011
Caa	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	-0.541	0.421
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

- 8 ratingových tříd (m).

Aplikace – vstupní data

Christensen, J., Hansen, E., Lando, D.: Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities, 2004, Journal of Banking and Finance 28 (5), 2575-2602.

	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	D
Aaa	-0.071	0.066	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Aa	0.009	-0.123	0.115	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.001	0.033	-0.117	0.080	0.003	0.000	0.000	0.000
Baa	0.001	0.001	0.088	-0.163	0.068	0.004	0.001	0.000
Ba	0.000	0.000	0.009	0.185	-0.293	0.096	0.003	0.000
B	0.000	0.000	0.002	0.015	0.093	-0.246	0.124	0.011
Caa	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.120	-0.541	0.421
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

- 8 ratingových tříd (m).

Aplikace – Porovnání odchylek prvků

Inamura, Y.: Estimating Continuous Time Transition Matrices from Discretely Observed Data, 2006, Bank of Japan Working Paper Series, No. 06-E07.

- Trajektorie simulovány na délku 7 let (τ).
- Pro každý rating simulováno 100 trajektorií vycházejících z tohoto bodu.
- Odchylky ($\widehat{\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{Q}$):

ML	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	D
Aaa	0.003	-0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Aa	-0.002	-0.016	0.018	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.002	-0.001	-0.004	0.006	-0.003	0.000	0.000	0.000
Baa	0.001	0.001	0.003	-0.018	0.015	-0.001	-0.001	0.000
Ba	0.000	0.000	-0.009	0.027	-0.023	0.008	-0.003	0.001
B	0.000	0.000	0.003	-0.015	0.024	-0.056	0.055	-0.011
Caa	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.030	-0.071	0.040
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

EM	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	D
Aaa	0.004	-0.003	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Aa	-0.002	-0.010	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.002	-0.001	0.000	0.002	-0.003	0.000	0.000	0.000
Baa	0.001	0.000	-0.001	-0.013	0.015	-0.002	-0.001	0.000
Ba	0.000	0.000	-0.009	0.016	-0.002	-0.002	-0.003	0.000
B	0.000	0.000	0.002	-0.015	0.017	-0.032	0.040	-0.011
Caa	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.024	-0.058	0.034
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

MC	Aaa	Aa	A	Baa	Ba	B	Caa	D
Aaa	0.004	-0.004	-0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Aa	-0.001	-0.012	0.013	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
A	0.002	-0.002	0.002	0.001	-0.002	0.000	0.000	0.000
Baa	0.001	0.001	-0.003	-0.010	0.014	-0.001	-0.001	0.000
Ba	0.000	0.000	-0.009	0.014	-0.001	-0.001	-0.003	0.000
B	0.000	0.000	0.001	-0.014	0.012	-0.025	0.036	-0.010
Caa	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.024	-0.045	0.020
D	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Aplikace – Porovnání normy rozdílu matic

Metoda	$\|\hat{Q} - Q\|$
ML	0.1315
EM	0.0970
MC	0.0791

Frobeniova norma matice:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2}.$$

Aplikace – Porovnání pravděpodobností selhání

Matici pravděpodobností přechodu odvodíme z $\boldsymbol{Q}$:

$$\boldsymbol{P}(t) = \exp(t\boldsymbol{Q}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \boldsymbol{Q}^k}{k!}.$$

Pro každý stav Aaa – Caa odvodíme pravděpodobnost selhání po jednom roce:

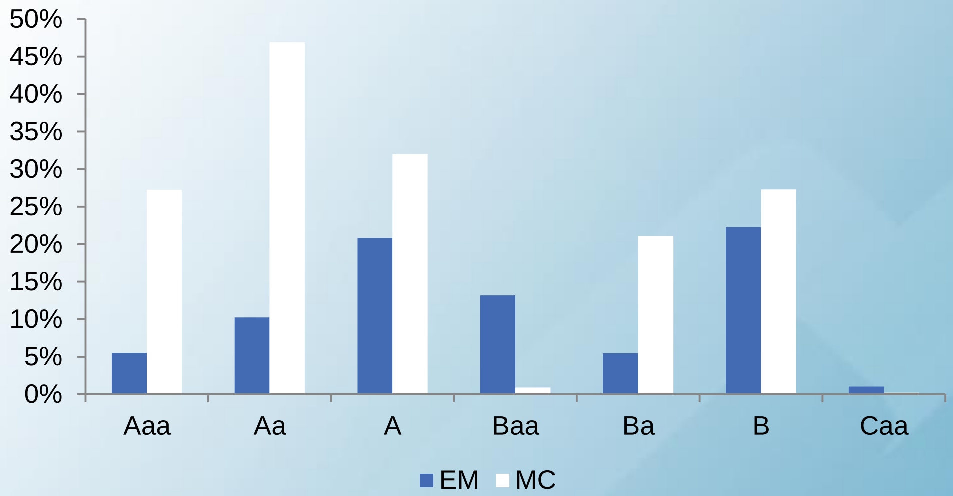
[%]	P(Q)	ML	EM	MC
Aaa	0.000001	0.000020	0.000002	0.000002
Aa	0.000019	0.000356	0.000055	0.000044
A	0.000672	0.003548	0.001411	0.001123
Baa	0.020873	0.039491	0.026077	0.020638
Ba	0.160501	0.235316	0.147619	0.129308
B	3.042908	2.762807	2.427599	2.380699
Caa	32.624244	34.004332	32.973438	32.556448

$P(\boldsymbol{Q})$ značí pravděpodobnost selhání odvozenou ze zadané matice intenzit.

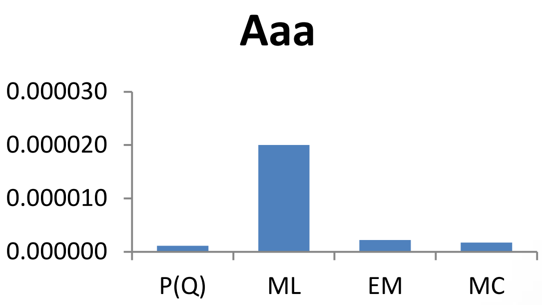
Aplikace – Porovnání pravděpodobností selhání

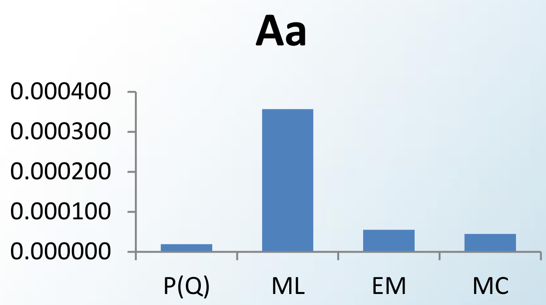
Odchylky pravděpodobností selhání odhadů od pravděpodobnosti selhání ze zadané matice vyjádřené v procentech:

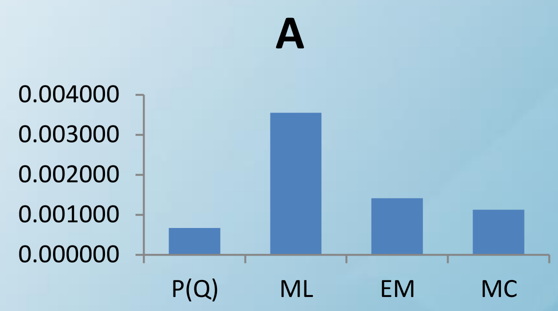
diff [%]	ML	EM	MC
Aaa	1718%	6%	27%
Aa	1826%	10%	47%
A	428%	21%	32%
Baa	89%	13%	1%
Ba	47%	5%	21%
B	9%	22%	27%
Caa	4%	1%	0%

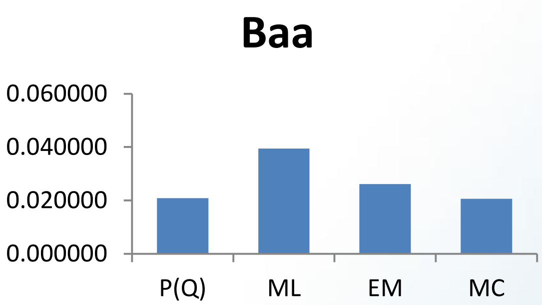


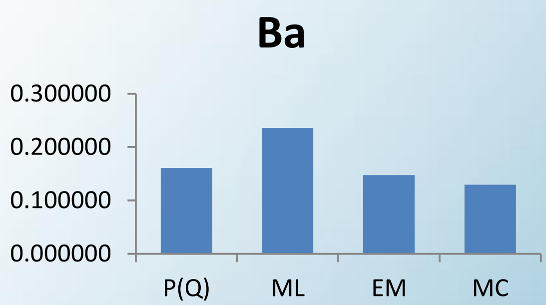
Aplikace – Porovnání pravděpodobností selhání

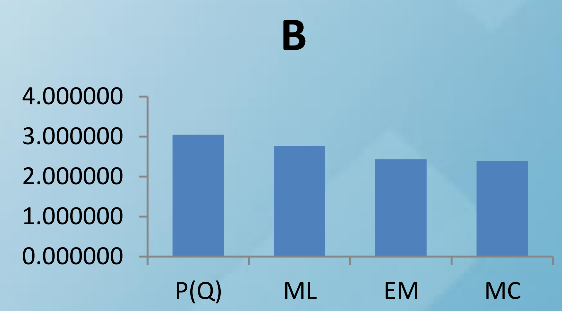


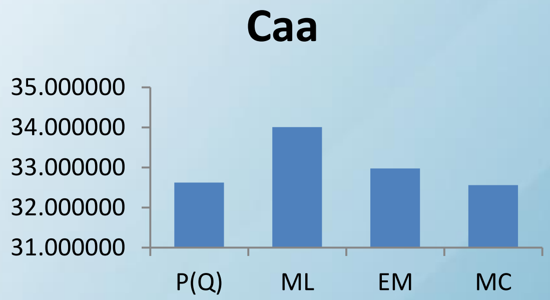




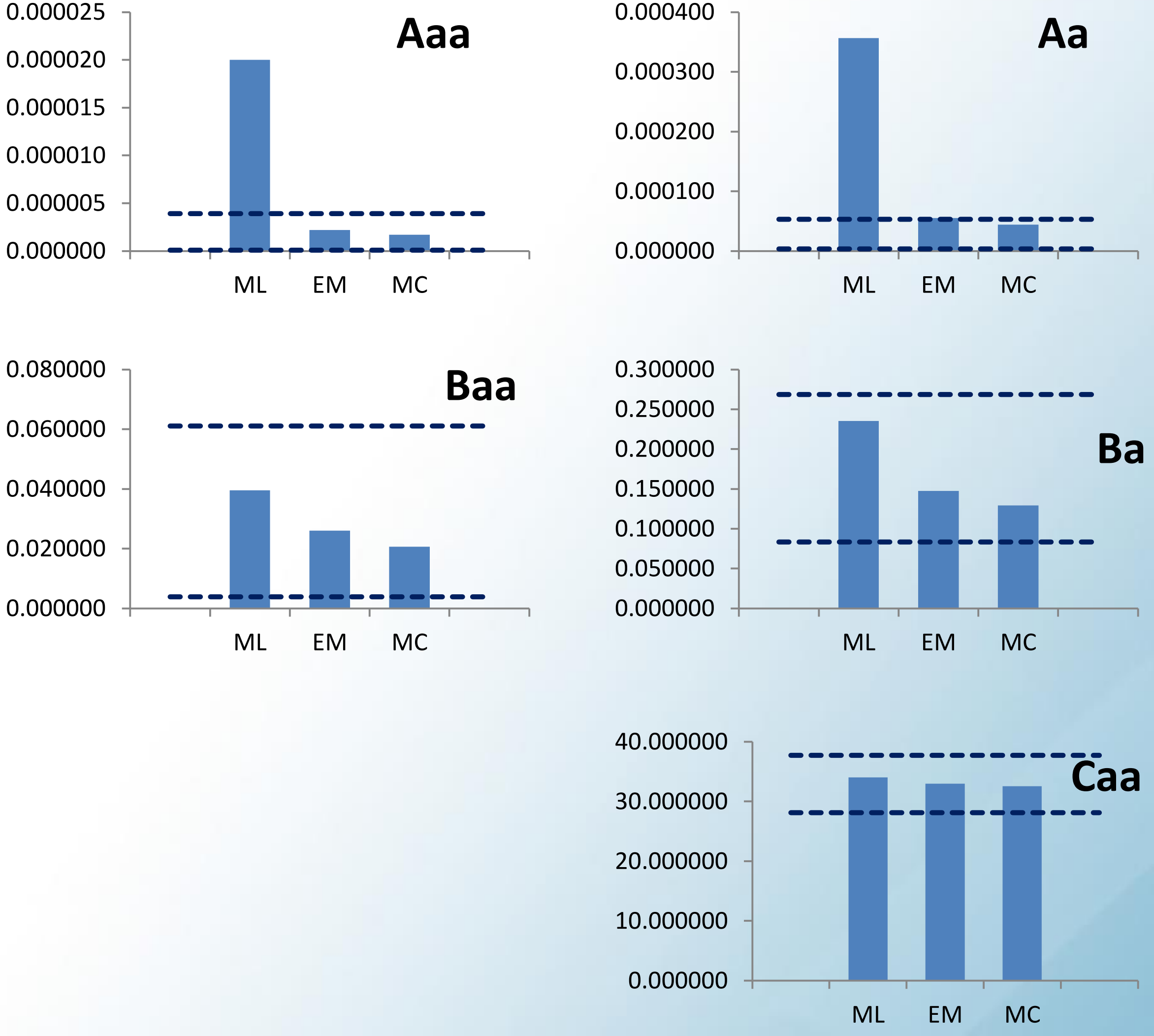




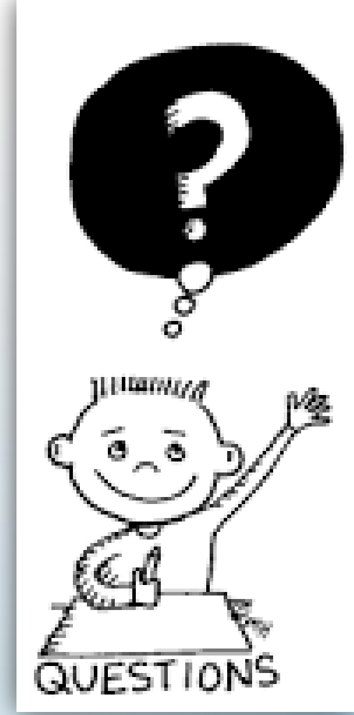




Aplikace – Porovnání pravděpodobností selhání



Dotazy



Literatura

- *Bladt, M., Sorensen, M.:* ***Statistical inference for discretely observed Markov jump process****, 2005, Journal of Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), Vol. 67, No. 3, 395-410.*
- *Christensen, J., Hansen, E., Lando, D.:* ***Confidence sets for continuous-time rating transition probabilities****, 2004, Journal of Banking and Finance 28 (5), 2575-2602.*
- *Hobolt, A., Jensen, J. L.:* ***Summary statistics for end-point conditioned continuous-time Markov chains****, 2011, Journal of Applied Probability, Vol. 48, No. 4, 911-924.*
- *Inamura, Y.:* ***Estimating Continuous Time Transition Matrices from Discretely Observed Data****, 2006, Bank of Japan Working Paper Series, No. 06-E07.*
- *Israel, R.B., Rosenthal, J.S., Wei, J.Z.:* ***Finding generators for Markov chains via empirical transition matrices with applications to credit ratings****, 2001, Mathematical Finance 11, 245-265*
- *Kingman, J.F.C:* ***The imbedding problem for finite Markov chains****, Z. Wahrscheinlichketstheorie, 1:14-24, 1962.*
- *McLachlan, G. J., Krishnan, T.:* ***The EM Algorithm and Extensions****, 1997, New Yersey, Wiley Series on Probability and Statistics, Second Edition, 1-84, ISBN 978-0-471-20170-0.*

Děkuji za pozornost