

Mnichovské metody chain ladder. Konference ASTIN červen 2007.

Petr Jedlička

Česká kancelář pojistitelů

30.11.2007

- 1 Informace o ASTIN 2007
- 2 Zobecnění metody MCL
 - Úvod
 - Robustní regrese
 - Přidání výpočtu MSE do modelu MCL
- 3 Mnohorozměrný model MCL
 - Existující mnohorozměrná rozšíření SCL
 - Návrh modelu mnohorozměrného MCL
 - Jiné přístupy jako modelovat závislosti plnění a závazku
- 4 Zobecnění Schnieperova modelu
- 5 Informace o příští ASTIN konferenci

Obsah prezentace

1 Informace o ASTIN 2007

2 Zobecnění metody MCL

- Úvod
- Robustní regrese
- Přidání výpočtu MSE do modelu MCL

3 Mnohorozměrný model MCL

- Existující mnohorozměrná rozšíření SCL
- Návrh modelu mnohorozměrného MCL
- Jiné přístupy jako modelovat závislosti plnění a závazku

4 Zobecnění Schnieperova modelu

5 Informace o příští ASTIN konferenci

Základní informace

- 37. ASTIN Colloquim
- oslava 50. výročí založení ASTIN (New York 1957)
- 19. až 22.6.2007
- Orlando, Florida, Disney's Contemporary Resort
- více než 140 účastníků
- přes 40 prezentovaných příspěvků
- H. Bühlmann, P. Embrechts, H. Panjer, Ch. Daykin, G. Taylor, M. Goovartes, J. Lemaire atd.

Okrupy témat příspěvků

- stochastika rezervování
- systémy bonus malus
- výpočetní systémy
 - knihovna pojistné matematiky v programu R
- podnikový risk management
 - modelování
 - ruinování
- kredibilita

Obsah prezentace

1 Informace o ASTIN 2007

2 Zobecnění metody MCL

- Úvod
- Robustní regrese
- Přidání výpočtu MSE do modelu MCL

3 Mnohorozměrný model MCL

- Existující mnohorozměrná rozšíření SCL
- Návrh modelu mnohorozměrného MCL
- Jiné přístupy jako modelovat závislosti plnění a závazku

4 Zobecnění Schnieperova modelu

5 Informace o příští ASTIN konferenci

Metoda Mnichovský Chain Ladder - úvodní připomenutí

- Odvozeno matematiky zajišťovny Munich Re ⇒ název (MCL) (viz Quarg 2004)
- Analyzuje současně trojúhelník vyplaceného plnění $Y_{i,j}^P$ a známého závazku (součet plnění a stavu RBNS) $Y_{i,j}^I$
- Navazuje na standardní stochastický model Chain Laddera T. Macka (SCL) (1993)
- Přínos MCL: Jestliže $Y_{0,n}^I \simeq Y_{0,n}^P$ MCL snižuje rozdíl mezi $\widehat{Y_{i,n}^I}$ a $\widehat{Y_{i,n}^P}$ pokud $i \geq 1$
- Uvedené neplatí pro SCL

Použité označení

- $a(i) = n - i$ dosud poslední známé období vývoje pro období vzniku i
- Data podílu vyplaceného pojistného plnění a celkového závazku

$$Q_{i,j} \equiv (P/I)_{i,j} \equiv \frac{Y_{i,j}^P}{Y_{i,j}^I} \quad i = 0, \dots, n \quad i + j \leq n$$

MCL - Podíl vyplaceného plnění a celkového závazku (PI)

- Odhad průměrného PI podílu j $P/I_j = \frac{\sum_{i=0}^n Y_{i,j}^P}{\sum_{i=0}^n Y_{i,j}^I}$
- Jestliže $i + j > n$ PI se definuje $(P/I)_{i,j} = \frac{\widehat{Y_{i,j}^P}}{\widehat{Y_{i,j}^I}}$
- Platí, že

$$\frac{P/I_{i,j}}{P/I_j} = \frac{P/I_{i,a(i)}}{P/I_a(i)}$$

- Důkaz uveden v Quarg 2004
- Interpretace objasňuje důvod nekonzistence odhadů závazku podle obou typů trojúhelníku
 - ① Nízké $(P/I)_{i,j}$ pro **známá data** na diagonále \Rightarrow nízký podíl $(P/I)_{i,j}$ pro předpovědi
 - ② Vznikají rozdíly v odhadech celkového závazku v závislosti na trojúhelníku
 - ③ Systematická limitace SCL

Základní principy MCL

- Úprava vývojových faktorů na základě znalosti $(P/I)_{i,a(i)}$
- Jestliže PI podíl je nízký (podprůměrný) \Rightarrow pro trojúhelník plnění
 - Dosud nízkou úroveň zlikvidovaných škod
 - Lze předpokládat, že v budoucnu dojde k jejímu urychlení
 - \Rightarrow vyšší individuální vývojový faktor $Y_{i,j+1}^P/Y_{i,j}^P$
 - Navýšení klasického odhadu podle SCL \widehat{f}_j^P
 - $\text{corr}\left(\frac{Y_{i,j}^P}{Y_{i,j}^I}; \frac{Y_{i,j+1}^P}{Y_{i,j}^P}\right) < 0$
- Jestliže PI je podprůměrný \Rightarrow pro data závazku
 - Vysoká úroveň celkového zarezervování
 - Lze očekávat nižší nárůst pro další období
 - \Rightarrow nižší individuální vývojový faktor $Y_{i,j+1}^I/Y_{i,j}^I$
 - Užitečné ponížit klasický odhad \widehat{f}_j^I
 - $\text{corr}\left(\frac{Y_{i,j}^P}{Y_{i,j}^I}; \frac{Y_{i,j+1}^I}{Y_{i,j}^I}\right) > 0$

Regresní model pro MCL - vyplacené plnění

- Proměnné jsou standardizovány \Rightarrow podílmněná residua

$$\text{Res}(X|C) = \frac{X - \text{E}(X|C)}{\sigma(X|C)}$$

- Struktura závislosti \Rightarrow podkladový model pro MCL data z

$$\text{E} \left(\text{Res} \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | Y_i(s)^P \right) | B_i(s) \right) = \lambda^P \cdot \text{Res}(Q_{i,s}^{-1} | Y_i(s)^P)$$

- Transformace do lépe interpretovatelné podoby (na základě definicí Res)

$$\text{E} \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | B_i(s) \right) = f_s^P + \lambda^P \frac{\sigma \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | Y_i(s)^P \right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} | Y_i(s)^P)} \cdot (Q_{i,s}^{-1} - \text{E}(Q_{i,s}^{-1} | Y_i(s)^P))$$

Regresní model pro MCL - celkový známý závazek

- V principu podobně jako pro vyplacené pojistné plnění

-

$$E \left(\text{Res} \left(\frac{Y_{i,s+1}^I}{Y_{i,s}^I} | Y_i(s)^I \right) | B_i(s) \right) = \lambda^I \cdot \text{Res}(Q_{i,s} | Y_i(s)^I)$$

- Po transformaci

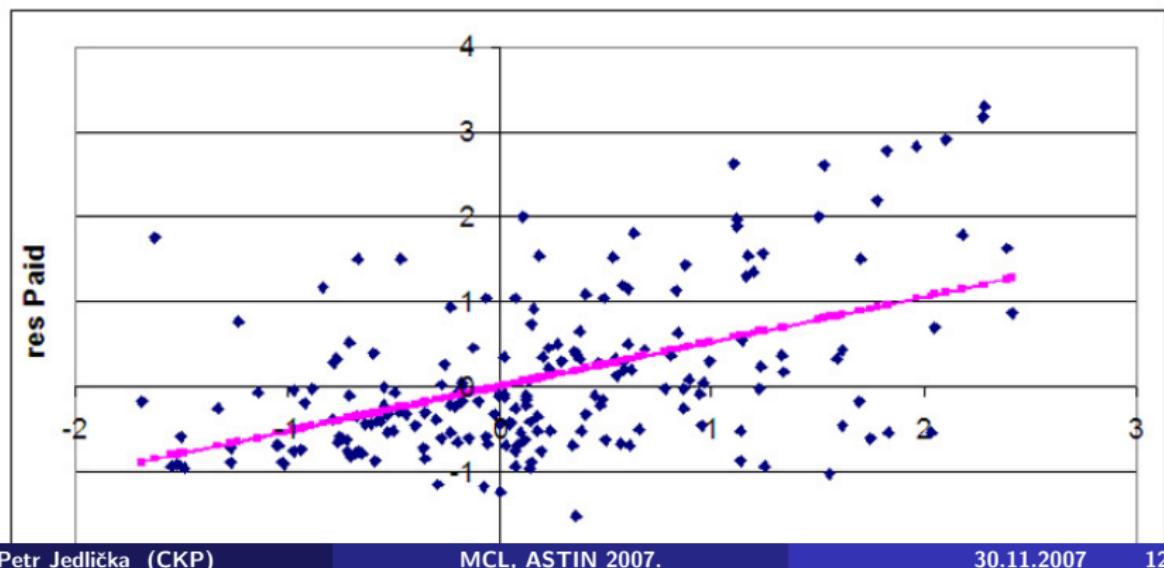
$$E \left(\frac{Y_{i,s+1}^I}{Y_{i,s}^I} | B_i(s) \right) = f_s^I + \lambda^I \frac{\sigma \left(\frac{Y_{i,s+1}^I}{Y_{i,s}^I} | Y_i(s)^I \right)}{\sigma(Q_{i,s} | Y_i(s)^I)} \cdot (Q_{i,s} - E(Q_{i,s} | Y_i(s)^I))$$

Poznámka - rozdílnost obou modelů

- $Q_{i,j}$ je vysvětlující proměnná pro celkový závazek
- $Q_{i,j}^{-1}$ je vysvětlující proměnná pro zaplacené plnění
- \Rightarrow v rozumných případech platí $\lambda^P > 0$ a také $\lambda^I > 0$

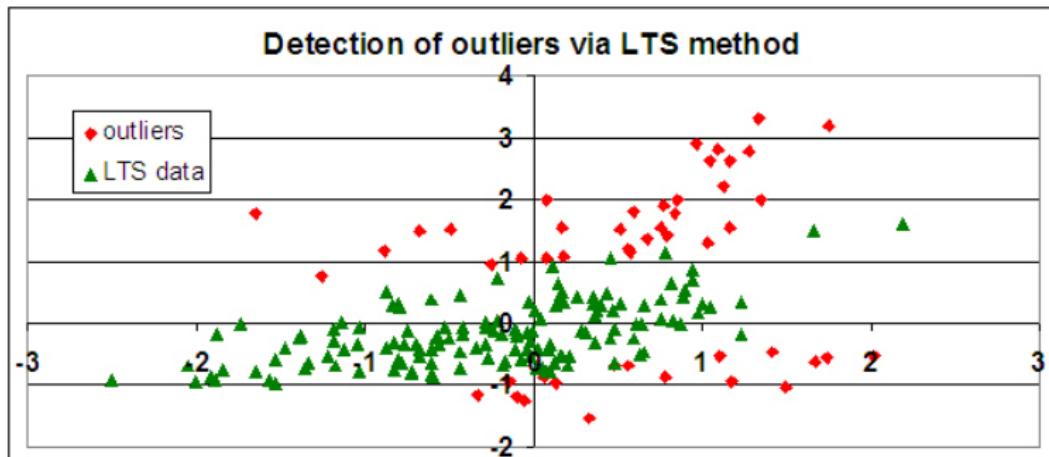
Praktické výpočty odhadů

- V článku použita metoda nejmenších čtverců (MNČ)
- Vysvětlující schopnost modelu v praxi spíše nízká (především pro celkový závazek)
- Bude diskutována souvislost tohoto faktu s interpretací kauzality mezi plněním a závazkem
- Ukázka nejlepších získaných výsledků:



Aplikace robustní regrese

- Robustní metody méně citlivé na odlehlá pozorování
- Snaha najít data, která se "nechovají" v souladu s modelem
- Aplikace různých metod
- Na příklad Huber, Bi square,
 - Odlehlým pozorováním se dává nižší váha
- Nejmenší useknuté čtverce (LTS)
 - Model je tvořen pouze z části dat a zbytek je vyloučen
- Ukázka silného vlivu odlehlých pozorování



Metoda LTS

- LTS odhad $\hat{\beta}^{LTS} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{p+1}} \sum_{i=1}^h r_{[i]}^2(\beta)$
- $r_{[i]}^2(\beta)$ označuje i -tou nejmenší hodnotu mezi $r_1^2(\beta), \dots, r_n^2(\beta)$
- $r_i(\beta) = y_i - x_i' \beta$ residua z MNČ
- usekávací konstanta h
- $\frac{n}{2} < h \leq n$
- Např. volba $h = 0,6 \cdot n$ and $h = 0,75 \cdot n$

Výpočetní algoritmus LTS

- ① Náhodně vybereme h pozorování a ně aplikujeme regresi MNČ
- ② Spočítáme residua získaného modelu **všech** pozorování a vybereme h s nejmenšími absolutnímu hodnotami residuů
- ③ Pro nově vybraných h pozorování aplikujeme MNČ znovu. Otázka: Poklesl RSS tato nová data?
 - odpověď ano \Rightarrow jedeme do bodu 2
 - odpověď ne \Rightarrow končíme se získaným modelem

Ukázka výsledků na reálných datech

- Odhady $\widehat{\lambda^P}$ a $\widehat{\lambda^I}$ se mezi modely liší poměrně výrazně
- Nebyl pozorován výrazný dopad na hodnoty předpovědí
- Aplikace na reálná data

	Chain Ladder	Standard	Munich				
	Type of regression	OLS	Hueber	Bi Square	LTS 1	LTS 2	
portfolio 1	parameters P	0,00	0,64	0,64	0,64	1,17	0,77
	ultimates P	31 463	32 371	32 378	32 381	32 329	32 509
	parameters I	0,00	0,44	0,43	0,43	0,55	0,32
	ultimates I	33 071	32 688	32 693	32 696	32 901	32 816
	P/I	95%	99%	99%	99%	98%	99%
portfolio 2	parameters P	0,00	0,59	0,56	0,56	0,44	0,45
	ultimates P	680 614 181	516 229 574	517 841 075	517 821 077	530 909 088	532 450 325
	parameters I	0,00	0,14	0,16	0,15	0,25	0,28
	ultimates I	553 855 313	564 472 802	566 233 742	566 237 793	580 567 131	582 096 967
	P/I	123%	91%	91%	91%	91%	91%
portfolio 3	parameters P	0,00	0,39	0,40		0,22	0,40
	ultimates P	746 137	779 799	778 303		767 383	771 394
	parameters I	0,00	0,47	0,52		0,55	0,71
	ultimates I	816 194	773 813	771 926		762 426	764 263
	P/I	91%	101%	101%		101%	101%

Teoretické odvození

Elasticita MCL rezervy = citlivost hodnoty na změnu odhadu parametru $\widehat{\lambda}$.

- Vyjdeme ze základního modelu

$$\widehat{f}_{i,k}^{P,MCL}(\widehat{\lambda^P}) = \widehat{f}_k^{P,SCL} + \widehat{\lambda^P} \frac{\widehat{\sigma_k^P}}{\widehat{\rho_k^P}} \cdot \left(\frac{\widehat{Y_{i,k}^I}}{\widehat{Y_{i,k}^P}} - \widehat{q_k^{-1}} \right)$$

- Funkce je lineární \Rightarrow

$$\widehat{f}_{i,k}^{P,MCL}(\widehat{\lambda^P}) = \widehat{f}_k^{P,SCL} + \widehat{\lambda^P} \cdot \widehat{f}_{i,k}^{P,MCL}'(\widehat{\lambda^P})$$

- Derivaci vývojových faktorů můžeme přepsat

$$\widehat{f}_{i,k}^{P,MCL}'(\widehat{\lambda^P}) = \frac{\widehat{\sigma_k^P}}{\widehat{\rho_k^P}} \cdot \left(\frac{\widehat{Y_{i,k}^I}}{\widehat{Y_{i,k}^P}} - \widehat{q_k^{-1}} \right)$$

Pokračování teoretického odvození

Dopady na elasticitu projekcí v závislosti na $\widehat{\lambda}$.

- Základní vztah: $\widehat{Y}_{i,n}^P = Y_{i,a(i)}^P \cdot \prod_{j=a(i)}^{n-1} \widehat{f}_{i,j}^P$
- Přeuspořádání vývojových faktorů

$$(Y_{i,n}^P)' = \sum_{j=a(i)}^{n-1} \frac{Y_{i,a(i)}^P}{\widehat{f}_{i,j}^P} \cdot (\widehat{f}_{i,j}^P)' \cdot \widehat{f}_{i,a(i)}^P \cdots \widehat{f}_{i,n-1}^P = \widehat{Y}_{i,n}^P \sum_{j=a(i)}^{n-1} \frac{(\widehat{f}_{i,j}^P)'}{\widehat{f}_{i,j}^P}$$

$$\Rightarrow \frac{(Y_{i,n}^P)'}{\widehat{Y}_{i,n}^P} = \frac{1}{\widehat{\lambda}^P} \cdot \left(\sum_{j=a(i)}^{n-1} \left(1 - \frac{\widehat{f}_j^P}{\widehat{f}_{i,j}^P} \right) \right)$$

Závěrečný výsledek

$$E(Q_{i,k}^{-1}) = \widehat{q}_k^{-1} \Rightarrow E\left(\widehat{f}_{i,k}^P'\right) = 0$$

Závěry a shrnutí k elasticitě MCL rezervy

- Užití vztahu $E\left(\widehat{f}_{i,k}^P'\right) = 0$
- $\Rightarrow \frac{(Y_{i,n}^P)'}{\widehat{Y}_{i,n}^P} = \frac{1}{\lambda^P} \cdot \sum_{j=a(i)}^{n-1} \left(\frac{\widehat{f}_j^P}{\widehat{f}_{i,j}^P}' \right)$
- Platí $E\left(\frac{(Y_{i,n}^P)'}{\widehat{Y}_{i,n}^P}\right) = 0$
- Podobně také $E\left(\frac{(Y_{i,n}^I)'}{\widehat{Y}_{i,n}^I}\right) = 0$

Interpretace

- Systematická závislost rezervy na λ neexistuje
- Potvrzuje původní numerické výsledky
- Obtížné říct, který bodový odhad rezervy je správný
- \Rightarrow Výpočet bezpečnostní přirážky nutný

variabilita MCL

- MCL uvádí střední hodnotu $E\left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | \mathbf{B}_i(s)\right)$
- Vztah pro variabilitu $\text{Var}\left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | \mathbf{B}_i(s)\right) = ?$

Postup odvození

- Začíná se podkladovou regresí MCL

$$\text{Res}\left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | Y_i^P(s)\right) = \lambda^P \text{Res}\left(\frac{Y_{i,s}^I}{Y_{i,s}^P} | Y_i^P(s)\right) + \varepsilon_{i,s}$$

- Vlastnosti residuů $E(\varepsilon_{i,s} | \mathbf{B}_i(s)) = 0$ a $\text{var}(\varepsilon_{i,s} | \mathbf{B}_i(s)) = \sigma_R^2$

- Úprava vztahu

$$\text{var}\left(\text{Res}\left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} | Y_i^P(s)\right) | \mathbf{B}_i(s)\right) = \sigma_R^2 \frac{\text{Res}^2\left(\frac{Y_{i,s}^I}{Y_{i,s}^P} | Y_i^P(s)\right)}{\sum_i \sum_s \text{Res}^2\left(\frac{Y_{i,s}^I}{Y_{i,s}^P} | Y_i^P(s)\right)}$$

Variabilita MCL - závěr odvození

Použijeme vztah

$$\text{var} \left(\text{Res} \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} \mid Y_i^P(s) \right) \mid \mathbf{B}_i(s) \right) = \frac{\text{var}(Y_{i,s+1}^P / Y_{i,s}^P \mid \mathbf{B}_i(s))}{\sigma_s^{P2} / Y_{i,s}^P}$$

Jestliže spojíme oba vztahy a připomeneme Mackův model

$$\text{Var} \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} \mid Y_i^P(s) \right) = \frac{(\sigma_i^P)^2}{Y_{i,s}^P} \Rightarrow$$

Vztah pro variabilitu MCL

může být uvedena jako zobecnění Mackova přístupu

$$\text{Var} \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} \mid B_i(s) \right) = \text{var}(\widehat{\lambda^P}) \sigma^2 \left(\frac{Y_{i,s+1}^P}{Y_{i,s}^P} \mid Y_i^P(s) \right) \text{Res}^2 \left(\frac{Y_{i,s}^I}{Y_{i,s}^P} \mid Y_i^P(s) \right)$$

Aplikace na výpočet střední kvadratické chyby (MSE)

- Obdobně pro celkový závazek

$$\text{Var} \left(\frac{Y_{i,s+1}^I}{Y_{i,s}^I} | B_i(s) \right) = \text{var}(\widehat{\lambda}^I) \sigma^2 \left(\frac{Y_{i,s+1}^I}{Y_{i,s}^I} | Y_i^I(s) \right) \text{Res}^2 \left(\frac{Y_{i,s}^P}{Y_{i,s}^I} | Y_i^I(s) \right)$$

- \Rightarrow Aplikace na MCL

$$\text{mse}(\widehat{R}_i) = \widehat{Y}_{i,n}^2 \sum_{k=n-i}^N \frac{\widehat{\sigma}_k^2}{\widehat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\widehat{Y}_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-k} Y_{i,k}} \right)$$

- nahrazení neznámých parametrů jejich odhady

$$\widehat{\sigma}_{i,s}^{P,MCL2} = \text{var}(\widehat{\lambda}^P) \cdot \widehat{\sigma}_s^{P,SCL2} \cdot \text{Res}^2 \left(\widehat{\frac{Y_{i,s}^I}{Y_{i,s}^P}} | Y_i(s) \right)$$

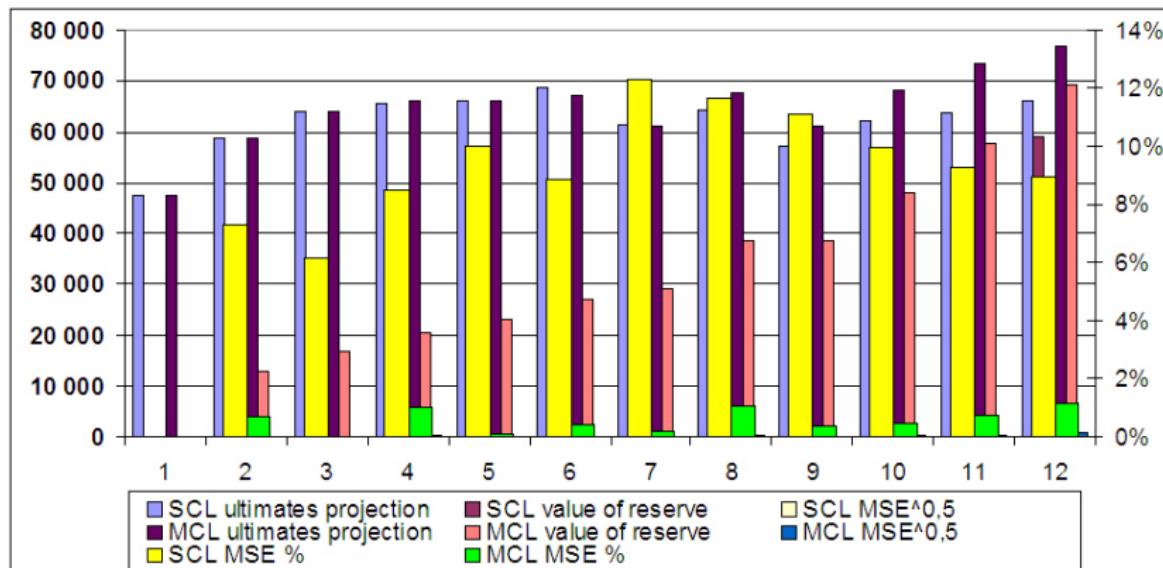
- Informace z obou trojúhelníků vede k výraznému poklesu variability
- Viz následující ukázka

Aplikace na reálná data

Srovnání MSE mezi MCL a SCL

		SCL				MCL			
year of origin	diagonal values	ultimate projection	value of reserve	MSE ^{0,5}	MSE %	ultimate projection	value of reserve	MSE ^{0,5}	MSE %
1	47 457	47 457	0	0	7,3%	47 457	0	0	0,7%
2	45 781	58 742	12 961	947	6,1%	58 736	12 955	88	0,0%
3	47 227	64 075	16 848	1 034	8,4%	64 068	16 841	2	0,0%
4	45 861	65 602	19 741	1 668	10,0%	66 219	20 358	202	1,0%
5	42 950	66 243	23 293	2 334	11,6%	66 159	23 209	24	0,4%
6	40 063	68 627	28 564	2 526	12,3%	67 175	27 112	115	0,2%
7	31 858	61 488	29 630	3 649	11,1%	60 936	29 078	56	0,5%
8	29 371	64 405	35 034	4 067	13,6%	67 810	38 439	401	1,0%
9	22 504	57 267	34 763	3 865	13,1%	61 105	38 601	136	0,4%
10	20 263	62 124	41 861	4 155	12,9%	68 299	48 036	222	0,5%
11	15 673	63 885	48 212	4 471	12,7%	73 443	57 770	427	0,7%
12	7 421	66 221	58 800	5 275	11,9%	76 686	69 265	795	1,1%

MSE graph



- ⇒ MSE je významně nižší v modelu MCL

Obsah prezentace

- 1 Informace o ASTIN 2007
- 2 Zobecnění metody MCL
 - Úvod
 - Robustní regrese
 - Přidání výpočtu MSE do modelu MCL
- 3 Mnohorozměrný model MCL
 - Existující mnohorozměrná rozšíření SCL
 - Návrh modelu mnohorozměrného MCL
 - Jiné přístupy jako modelovat závislosti plnění a závazku
- 4 Zobecnění Schnieperova modelu
- 5 Informace o příští ASTIN konferenci

Přístup K. Schmidta

- Sloupcový vektor

$$\mathbf{Y}_{i,j} = (Y_{i,j}^1, \dots, Y_{i,j}^K)'$$

celkový objem škod nastalých v období i a známých po j obdobích po svém vzniku

- Analyzuje se najednou K pojistných odvětvích
- Použité označení $\Upsilon_{i,j} = \text{diag}(\mathbf{Y}_{i,j})$. Odtud také $\mathbf{Y}_{i,j} = \Upsilon_{i,j} \mathbf{1}$
- Jednorozměrný případ

$$Y_{i,j+1} = Y_{i,j} \cdot F_{i,j}$$

- Mnohorozměrné rozšíření

$$\mathbf{Y}_{i,j+1} = \Upsilon_{i,j} \cdot \mathbf{F}_{i,j}$$

- $\mathbf{F}_{i,j} = (F_{i,j}^1, \dots, F_{i,j}^K)'$ zobecnění individuálního podílu

Stochastické předpoklady mnohorozměrných metod

- Podmíněná střední hodnota
 - Existuje K-rozměrný faktor nezávislý na roku vzniku, že platí

$$E(\mathbf{Y}_{i,j+1} | \mathbf{Y}_i(j)) = \boldsymbol{\Upsilon}_{i,j} \cdot \mathbf{f}_j$$

- Podmíněný rozptyl a nezávislost období vzniku
 - Existuje matice Σ_j tak, že

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_{i1,j+1}, \mathbf{Y}_{i2,j+1} | \mathbf{Y}_{i1}(j), \mathbf{Y}_{i2}(j)) = \boldsymbol{\Upsilon}_{i,j}^{1/2} \Sigma_j \boldsymbol{\Upsilon}_{i,j}^{1/2}$$

jestliže $i = i_1 = i_2$ a také

$$\text{Cov}(\mathbf{Y}_{i1,j+1}, \mathbf{Y}_{i2,j+1} | \mathbf{Y}_{i1}(j), \mathbf{Y}_{i2}(j)) = 0$$

jinak

Důsledek

- $E(\mathbf{F}_{i,j} | \mathbf{Y}_i(j)) = \mathbf{f}_j$
- $\text{Cov}(\mathbf{F}_{i1,j+1}, \mathbf{F}_{i2,j+1} | \mathbf{Y}_{i1}(j), \mathbf{Y}_{i2}(j)) = \boldsymbol{\Upsilon}_{i,j}^{-1/2} \Sigma_j \boldsymbol{\Upsilon}_{i,j}^{-1/2},$

Odhady parametrů v mnohorozměrném případě

- Analogie s jednorozměrným případem

- odhad f_j se uvažuje ve tvaru $\hat{f}_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} w_i F_{i,j}$
- nestranný jestliže $\sum_{i=0}^{n-j-1} w_i = 1$
- minimalizuje kvadratickou odchylku, jestliže

$$w_i = \frac{Y_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} Y_{i,j}}$$

Mnohorozměrný případ

- Odhad \mathbf{f}_j se uvažuje jako $\hat{\mathbf{f}}_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} W_i F_{i,j}$
- Nestranný jestliže $\sum_{i=0}^{n-j-1} W_i = I$
- Součet čtverců je minimální, jestliže

$$\hat{\mathbf{f}}_j = \left(\sum_{i=0}^{n-j-1} \boldsymbol{\gamma}_{i,j}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{i,j}^{1/2} \right) \sum_{i=0}^{n-j-1} \boldsymbol{\gamma}_{i,j}^{1/2} \boldsymbol{\Sigma}_j^{-1} \boldsymbol{\gamma}_{i,j}^{1/2} \mathbf{F}_{i,j}$$

Princip odhadu rozptylové matice

- Důležité pro praktické použití
- Navrhuje se ve standardní podobě

$$\widehat{\Sigma}_j = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=0}^{n-j-1} \left(\gamma_{i,j}^{1/2} \left(\widehat{\mathbf{F}}_{i,j} - \widehat{\mathbf{f}}_j \right) \right) \cdot \left(\gamma_{i,j}^{1/2} \left(\widehat{\mathbf{F}}_{i,j} - \widehat{\mathbf{f}}_j \right) \right)'$$

- Praktická limitace: $\widehat{\Sigma}_j$ není dobře definováno jestliže $j \geq n - k$
- Omezené použití v praxi

Přístup E. Kremera

Mnohorozměrný model

$$Y_{i,j+1} = Y_{i,j} \cdot f_j + \varepsilon_{i,j} \quad i = 0, \dots, n$$

$$\text{E}(\varepsilon_{i,j} | \cdot) = 0 \quad \text{var}(\varepsilon_{i,j} | \cdot) = \sigma_j^2 \cdot Y_{i,j}.$$

\Rightarrow platí pro všechna j

$$Y_{i,j+1}^k = Y_{i,j}^k \cdot f_j^k + \varepsilon_{i,j}^k \quad i = 0, \dots, n \quad k = 1, \dots, K$$

- Standardní linearní model se předpokládá $\forall K$ analyzovaných run-off trojúhelníků
- Navíc $\text{cov}(\varepsilon_{i,j}^{k_1}, \varepsilon_{i,j}^{k_2} | \cdot) = C_i^{k_1, k_2} \cdot \sqrt{Y_{i,j}^{k_1}} \cdot \sqrt{Y_{i,j}^{k_2}}$ a $\text{var}(\varepsilon_{i,j}^k | \cdot) = (\sigma_j^k)^2$.
- Jestliže $i_1 \neq i_2$ nebo $j_1 \neq j_2$ potom se residua předpokládají nekorelovaná $\text{cov}(\varepsilon_{i_1,j_1}^{k_1}, \varepsilon_{i_2,j_2}^{k_2} | \cdot) = 0$

Poznámky k modelu

- Vedle odhadu střední hodnoty zdůrazňuje také odhady rozptylové matice
- Aitkenův odhad f_j
- Problém časové náročnosti výpočtu inverzní matice $\hat{\Psi}^{-1}$
- Vhodnější pro mnohorozměrné rozšíření MCL

Výpočetní algoritmus - odhadы parametrů modelu

- ① Výpočet odhadů f_j^k odděleně pro každé pojistné odvětví
- ② Odhad variability odpovídající odhadu vývojových faktorů se odvodí standardním vztahem

$$\widehat{\sigma}_{j,k}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} (Y_{i,j+1}^k - \widehat{f}_j^k Y_{i,j}^k)^2}{\sum_{i=1}^{n-j-1} Y_{i,j}^k}$$

a také odhad kovariancí

$$\widehat{C}_i^{k1,k2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j-1} (Y_{i,j+1}^{k1} - \widehat{f}_j^{k1} Y_{i,j}^{k1})(Y_{i,j+1}^{k2} - \widehat{f}_j^{k2} Y_{i,j}^{k2})}{\sum_{i=1}^{n-j-1} \sqrt{Y_{i,j}^{k1}} \sqrt{Y_{i,j}^{k2}}}$$

- ③ "Zlepšení" odhadů \mathbf{f}_j^{l+1} na základě inversní matice $\widehat{\sigma}_{j,k}^{2,l}$ a $\widehat{C}_i^{k1,k2,l}$.
- ④ Opakování postupu dokud odhady nekonvergují

Návrh mnohorozměrného rozšíření MCL (MMCL)

- Přístup E. Kremera shledán vhodnější pro MMCL
- Lineární model s parametry λ^P a λ^I
- Vektor parametrů $(\lambda^{P,1}, \dots, \lambda^{P,K})$ se odhaduje najednou
- Předpokládá se, že předpoklady MCL platí pro všechna portfolia $k = 1, \dots, K$

$$\text{Res} \left(\frac{Y_{i,s+1}^{P,k}}{Y_{i,s}^{P,k}} | Y_i(s)^{P,k} | B_i(s)^k \right) = \lambda^{P,k} \cdot \text{Res}((Q_{i,s}^k)^{-1} | Y_i(s)^P) + (\varepsilon_{i,j}^k | Y_i(s)^P)$$

- Jednorozměrný případ $E(\varepsilon_{i,j} | \cdot) = 0$ and $\text{var}(\varepsilon_{i,j} | \cdot) = \sigma^2$

Návrh mnohorozměrného rozšíření MCL (MMCL)

- Mnohorozměrné stochastické předpoklady

$$\text{cov}(\varepsilon_{i1,j1}^{k1}, \varepsilon_{i2,j2}^{k2} | \cdot) = 0$$

jestliže $i_1 \neq i_2$ a

$$\text{cov}(\varepsilon_{i,j1}^{k1}, \varepsilon_{i,j2}^{k2} | \cdot) = 0$$

jestliže $j_1 \neq j_2$

- V případě shody roku vzniku a vývoje v obou případech

$$\text{cov}(\varepsilon_{i,j}^{k1}, \varepsilon_{i,j}^{k2} | \cdot) = \sigma_{k1,k2}$$

- Obecná specifikace modelu

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{P,1} \\ \mathbf{Y}^{P,2} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}^{P,K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{P,1} & & & \\ & \mathbf{X}^{P,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{X}^{P,K} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon^{P,1} \\ \varepsilon^{P,2} \\ \vdots \\ \varepsilon^{P,K} \end{pmatrix}$$

Proměnné mnohorozměrného modelu

Vysvětovaná a vysvětlující proměnné

$$\mathbf{Y}^{P,k} = \begin{pmatrix} \text{Res} \left(\frac{Y_{0,1}^{P,k}}{Y_{0,0}^{P,k}} | \cdot \right) \\ \text{Res} \left(\frac{Y_{0,2}^{P,k}}{Y_{0,0}^{P,k}} | \cdot \right) \\ \vdots \\ \text{Res} \left(\frac{Y_{n-1,1}^{P,k}}{Y_{n-1,0}^{P,k}} | \cdot \right) \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{P,k} = \begin{pmatrix} \text{Res} \left(\frac{Y_{0,0}^{I,k}}{Y_{0,0}^{P,k}} | \cdot \right) \\ \text{Res} \left(\frac{Y_{0,1}^{I,k}}{Y_{0,1}^{P,k}} | \cdot \right) \\ \vdots \\ \text{Res} \left(\frac{Y_{n-1,0}^{I,k}}{Y_{n-1,0}^{P,k}} | \cdot \right) \end{pmatrix}$$

Výpočetní algoritmus MMCL

- ① získáme odhadu metodou MNČ jako v jednorozměrném případě

$$\widehat{\lambda^{P,k}} = b_k = (\mathbf{X}^{P,k'} \cdot \mathbf{X}^{P,k})^{-1} \mathbf{X}^{P,k'} \mathbf{Y}^{P,k}$$

- ② Matice Σ se odhadne užitím vztahu

$$\widehat{\sigma_{k1,k2}} = \frac{\widehat{\varepsilon_{.,k1}} \widehat{\varepsilon_{.,k2}}}{n \cdot (n - 1)/2}$$

$\widehat{\varepsilon_{.,k1}}$ vektor MNČ vypočtených residuů $k1$ -tého modelu.

- ③ Odhad při nestejném rozptylu $\beta = \lambda^P$ se odvodí z
 $\beta = (Z' \widehat{\Psi}^{-1} Z)^{-1} Z' \widehat{\Psi}^{-1} \mathbf{Y}^P$ $\widehat{\Psi} = \widehat{\Sigma} \otimes I$ a Z je blokově diagonální
matice $\mathbf{X}^{P,k}$, proto $Z = \text{diag}(\mathbf{X}^{P,1}, \dots, \mathbf{X}^{P,K})$.

Poznámky

- Počáteční odhad je nahrazen odhadem získaným ve 3. kroku.
- Opakování postupu
- Končíme, jestliže parametry konvergují

Návrhy modelování

- Odlišná myšlenka k předpovědi celkového závazku
- Může také fungovat pro dostatečně nevyvinuté trojúhelníky (tail factor)
- Definujeme $P_{i,j} \equiv Y_{i,j}^P$ a $I_{i,j} \equiv Y_{i,j}^I$
- Přírůstky plnění v období $i + j$ se značí $P_{i,j}^d = P_{i,j} - P_{i,j-1}$

Upřesnění modelu

- vyplacené plnění v následující období se vysvětluje hodnotou rezervy v současnosti $R_{i,j} = I_{i,j} - P_{i,j}$
- lineární předpověď

$$P_{i,j+1}^d = \alpha_j R_{i,j} + \varepsilon_{i,j}^A, \quad \text{var}(\varepsilon_{i,j}^A) = \sigma_A^2 R_{i,j}$$

- respektuje myšlenku MCL, že v případě vyšší rezervy lze očekávat nárůst plnění
- odhad $\widehat{R}_{i,j}$ je nutný pro odhad $\widehat{P}_{i,j}^d \quad i + j > n$

Modely vývoje rezervy

- Jednoduchý model vývoje rezervy

$$R_{i,j+1} = \beta_j R_{i,j} + \varepsilon_{i,j}^B, \quad \text{var}(\varepsilon_{i,j}^B) = \sigma_B^2 R_{i,j}$$

- Připomíná SCL
- Dále ale platí $R_{i,j+1} = R_{i,j} - P_{i,j+1}^d + R_{i,j+1}^T - R_{i,j+1}^R$
- $R_{i,j+1}^T$ označuje tvorbu rezervy (v případě registrace dalších nároků) a $R_{i,j+1}^R$ ukazuje rozpuštění rezervy po přehodnocení některých závazků
- Model vývoje

$$R_{i,j}^T - R_{i,j}^R = \gamma_j R_{i,j} + \varepsilon_{i,j}^C, \quad \text{var}(\varepsilon_{i,j}^C) = \sigma_C^2 R_{i,j}$$

- Odvozeno ze vztahu $R_{i,j+1} = R_{i,j} - P_{i,j+1}^d + R_{i,j+1}^T - R_{i,j+1}^R = R_{i,j} - \alpha_j R_{i,j} + R_{i,j+1}^T - R_{i,j+1}^R + \varepsilon_{i,j}^A = \beta_j R_{i,j} + \varepsilon_{i,j}^B \Rightarrow \beta_j + \alpha_j - 1 = \gamma_j$ a také $\varepsilon_{i,j}^C = \varepsilon_{i,j}^A + \varepsilon_{i,j}^B$

Příčinná souvislost mezi plněním a závazkem

- Pro plnění $P_{i,j+1} = P_{i,j} + P_{i,j}^d$
- Existují 2 standardní modely pro vyplacené plnění
 - ① Standard Chain Ladder: $P_{i,j+1} = f_j \cdot P_{i,j} + \varepsilon_{i,j}$
 - ② Alternativní model I: $P_{i,j+1} = P_{i,j} + \alpha_j R_{i,j} + \varepsilon_{i,j} \cdot P_{i,j}$
- Kombinace obou přístupů

$$\begin{pmatrix} P_{i,j+1} \\ R_{i,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_j & \alpha_j \\ \delta_j & \beta_j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{i,j} \\ R_{i,j} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{i,j}^P \\ \varepsilon_{i,j}^R \end{pmatrix}$$

- 2 jednoduché modely se dají chápat jako speciální případy
 - $\alpha_j = 0 \Rightarrow$ získáme SCL model
 - $f_j = 1 \Rightarrow$ získáme "alternativní" model 1
- Můžeme očekávat $\delta_j = 0$ jestliže vyplacené plnění neposkytuje informace pro budoucí vývoj rezervy

Odhady parameterů

- Na základě modelů vektorové autoregresce

$$\widehat{\Pi}_j = \left[\sum_{i=1}^{n-j} \mathbf{Y}_i \mathbf{X}_i' \right] \left[\sum_{i=1}^{n-j} \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i' \right]^{-1}$$

- Označení

$$\mathbf{Y}_i \equiv \begin{pmatrix} P_{i,j+1} \\ R_{i,j+1} \end{pmatrix}, \Pi_j \equiv \begin{pmatrix} f_j & \alpha_j \\ \delta_j & \beta_j \end{pmatrix}, \mathbf{X}_i \equiv \begin{pmatrix} P_{i,j} \\ R_{i,j} \end{pmatrix}, \Sigma \equiv \text{Var} \begin{pmatrix} \varepsilon_{i,j}^P \\ \varepsilon_{i,j}^R \end{pmatrix}$$

- Odhad rozptylové matice

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{n-j-1} \sum \widehat{\varepsilon}_{i \cdot} \widehat{\varepsilon}_i'$$

kde $\widehat{\varepsilon}_i = \mathbf{Y}_i - \widehat{\Pi}' \mathbf{X}_i$

Obsah prezentace

- 1 Informace o ASTIN 2007
- 2 Zobecnění metody MCL
 - Úvod
 - Robustní regrese
 - Přidání výpočtu MSE do modelu MCL
- 3 Mnohorozměrný model MCL
 - Existující mnohorozměrná rozšíření SCL
 - Návrh modelu mnohorozměrného MCL
 - Jiné přístupy jako modelovat závislosti plnění a závazku
- 4 Zobecnění Schnieperova modelu
- 5 Informace o příští ASTIN konferenci

Použité označení

- Alternativa přepisu vývoje celkového závazku

$$I_{i,j} = I_{i,j-1} - D_{i,j} + N_{i,j}$$

- Odpovídá situaci z předchozího návrhu, kdy

$$N_{i,j} = R_{i,j}^T, \quad D_{i,j} = R_{i,j}^R$$

- Interpretace

- ① $N_{i,j}$ nově registrované nároky
- ② $D_{i,j}$ pozitivní vývoj dříve registrovaných nároků

Předpoklady modelu

- střední hodnota

$$\mathrm{E}(N_{i,j}|I_{i,j-1}) = E_i \lambda_j$$

$$\mathrm{E}(D_{i,j}|I_{i,j-1}) = I_{i,j-1} \delta_j$$

- E_i je předpokládáno známé, vhodný objem rizika
- rozptyl

$$\mathrm{var}(N_{i,j}|I_{i,j-1}) = E_i \sigma_j^2$$

$$\mathrm{var}(D_{i,j}|I_{i,j-1}) = Y_{i,j-1} \tau_j^2$$

- \Rightarrow neuvažují se další předpoklady o rozdělení
- nezávislost řádků

$$(N_{i,j}, D_{i,j})$$

se předpokládají pro různá období vzniku nezávislá

Standardní odhady parametrů

- Připomíná odhady vývojových faktorů

$$\hat{\lambda}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} N_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} E_i} \quad \forall j$$

$$\hat{\delta}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-j} D_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n+1-j} l_{i,j-1}} \quad \forall j$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{1}{E_i} \left(N_{i,j} - \hat{\lambda}_j E_i \right)^2 \forall j$$

$$\hat{\tau}_j^2 = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j+1} \frac{1}{l_{i,j-1}} \left(D_{i,j} - \hat{\delta}_j l_{i,j-1} \right)^2 \forall j$$

Odhady projekcí - rekurzivní odvození

- vychází se ze základní formule modelu

$$I_{i,j} = I_{i,j-1} - D_{i,j} + N_{i,j}$$
- predikce o 1 krok dopředu

$$\begin{aligned}\widehat{I_{2,n}} &= E(I_{2,n}|I_{2,n-1}) = E(I_{2,n-1} - D_{2,n} + N_{2,n}|I_{2,n-1}) \\ &= I_{2,n-1} + \lambda_n E_2 = I_{2,n-1}(1 - \delta_n) + \lambda_n E_2\end{aligned}$$

- podobně predikce o 2 kroky

$$\widehat{X_{3,n}} = X_{3,n-2}(1 - \delta_{n-1})(1 - \delta_n) + E_3(1 - \delta_n)\lambda_{n-1} + E_3\lambda_n$$

- Lze zobecnit pro další období vzniku

Rozšíření na stochastický model

- Autorka uvažuje následovně

$$\left(\frac{N_{i,j}}{E_i} | I_{i,j-1} \right) \sim N \left(\lambda_j, \frac{\sigma_j^2}{E_i} \right)$$

a také

$$\left(\frac{D_{i,j}}{I_{i,j-1}} | I_{i,j-1} \right) \sim N \left(\delta_j, \frac{\tau_j^2}{I_{i,j-1}} \right)$$

- Pak vycházejí stejné odhady rozptylů jako u původního Schnieperova modelu

Rozdělení projekcí

- Rozptyl procesu se odvodil

$$\text{var}(I_{i,j+t}|I_{i,j}) = (1 - \delta_{j+t}^2)\text{var}(I_{i,j+t-1}|I_{i,j}) + \tau_{j+t}^2 E(I_{j+t-1}|I_{i,j}) + E_i \sigma_{j+t}^2$$

- Chyba odhadů vychází

$$\text{var}(I_{i,j+t}) = \widehat{I}_{i,j+t-1}^2 \text{var}(\widehat{\delta}_{j+t}) + (1 - \delta_{j+t})^2 \text{var}(\widehat{I}_{i,j+t-1}) +$$

$$+ \text{var}(\widehat{\delta}_{j+t})\text{var}(\widehat{I}_{i,j+t-1}) + E_i^2 \text{var}(\widehat{\lambda}_{j+t})(1)$$

- Střední čtverová chyba celé rezervy

$$MSE(\widehat{R}|\cdot) = \text{Var}(R|\cdot) + \text{Var}(\widehat{R}|\cdot) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(I_{i,n}|I_{i,j}) + \sum_{i=1}^n \text{var}(\widehat{I}_{i,n}) +$$

$$+ 2 \sum_{t=1}^{n-1} \sum_{s=t}^n \text{cov}(\widehat{I}_{t,n}, \widehat{I}_{s,n})(2)$$

- Aletrnativně autorka uvažuje také simulace

Odkazy na literaturu 1

- Cizek, P., Robust Estimation in Nonlinear Regression and Limited Dependent Variable Models,. Working Paper, CERGE-EI, Prague, 2001.
- Hess, T., Schmidt, K.D., Zocher, M., Multivariate loss prediction in the multivariate additive model, *Insurance: Mathematics and Economics* 39, 2006.
- Jedlicka, P., Recent developments in claims reserving, *Proceedings of Week of doctoral students*, Charles University, Prague, 2006.
- Kremer, E., The correlated chain ladder method for reserving in case of correlated claims development, *Blatter DGVFM* 27, 2005.

Odkazy na literaturu 2

- Mack, T., Distribution free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserves Estimates, *ASTIN Bulletin*, Vol. 23, No. 2, 1993.
- Prohl, C., Schmidt, K.D., Multivariate Chain ladder, *Dresdner Schriften zu Versicherungsmathematik* 3/2005, 2005.
- Quarg, G., Mack, T., Munich Chain Ladder, *Blatter DGVFM* 26, Munich, 2004.
- Verdier, B., Klinger, A., JAB Chain: A model based calculation of paid and incurred developments factors *36th ASTIN Colloquium*, 2005.

Obsah prezentace

1 Informace o ASTIN 2007

2 Zobecnění metody MCL

- Úvod
- Robustní regrese
- Přidání výpočtu MSE do modelu MCL

3 Mnohorozměrný model MCL

- Existující mnohorozměrná rozšíření SCL
- Návrh modelu mnohorozměrného MCL
- Jiné přístupy jako modelovat závislosti plnění a závazku

4 Zobecnění Schnieperova modelu

5 Informace o příští ASTIN konferenci

Manchester 2008

- 13. až 16. července 2008
- <http://www.actuaries.org/ASTIN2008>
- Témata příspěvků
 - ① Solvency II a IFRS
 - ② Risk Management
 - ③ Narůstající rizika (klimatické změny, terrorismus, přírodní katastrofy)
 - ④ Profese aktuára (komunikování a interpretace rizika a nejistoty, statistiky, software)
- Termín k zaslání příspěvků do 28.2.2008

Děkuji Vám za pozornost