

Rizikový kapitál, životní upisovací rizika

Aktuárský seminář, 24. dubna 2015

Ondřej Kudler



Obsah

- 1** Rizikový kapitál
- 2** Solvency II a životní upisovací riziko
- 3** Riziko dlouhověkosti

1

- 1 Rizikový kapitál**
- 2 Solvency II a životní upisovací riziko**
- 3 Riziko dlouhověkosti**

Solventnost

Existuje velmi mnoho definic pojmu solventnost.

Solventností pojišťovny se rozumí její schopnost zabezpečit vlastními zdroji trvalou splnitelnost závazků z pojišťovací činnosti.

(zákon o pojišťovnictví, [28])

„Ability of an insurer to meet its obligations to policyholders when they fall due.“

(IAIS, Glossary, [17])

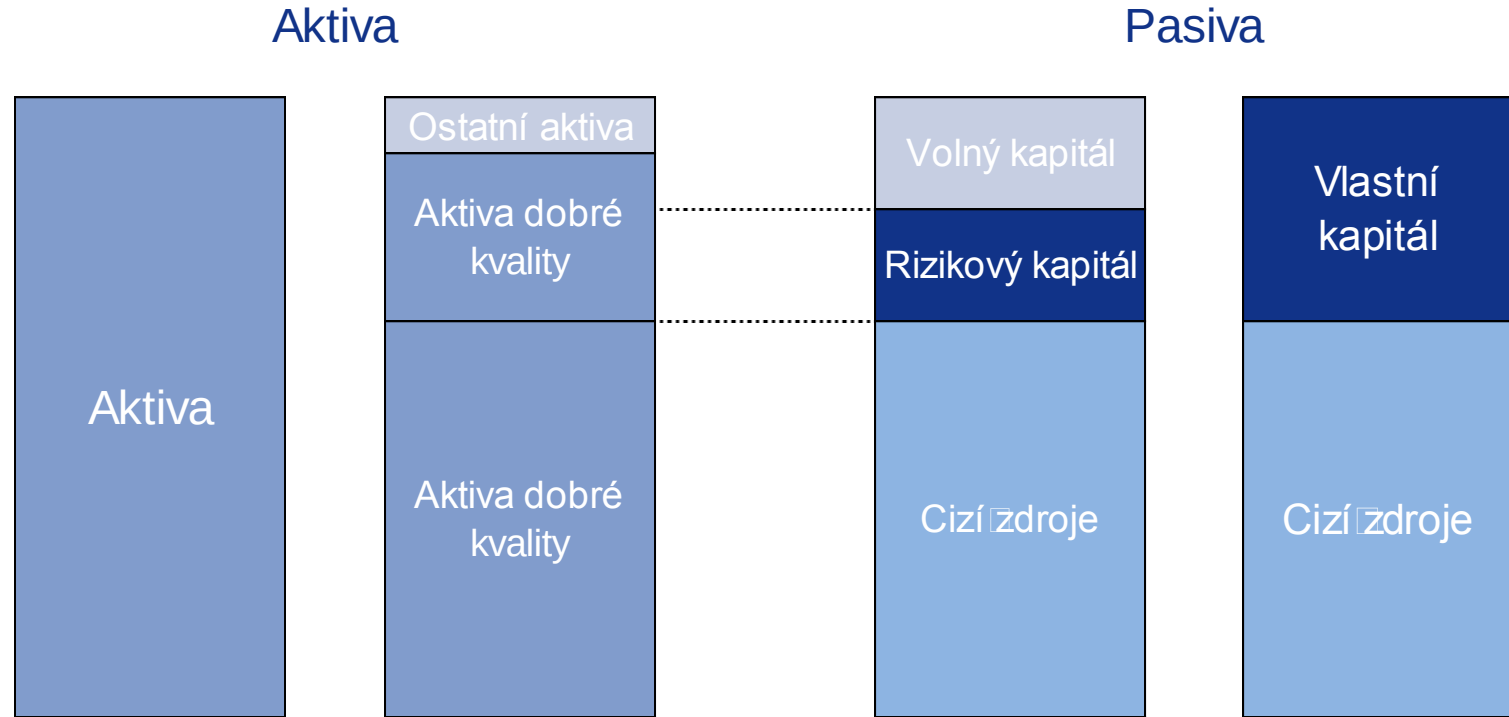
„An insurance company is solvent if it is able to fulfil its obligations under all contracts at any time (or at least under most circumstances).“

(IAIS, On Solvency, Solvency Assessments and Actuarial Issues, [18])

Způsobilost platiti.

(Ottův slovník naučný, [24])

Rizikový kapitál



Možná definice rizikového kapitálu:

Taková výše vlastního kapitálu, při které jsou pojistníci a oprávněné osoby dostatečně ochráněni pro případ neočekávaných ztrát pojišťovny před její neschopností dostát svým závazkům plynoucím z uzavřených pojistných smluv, přičemž aktiva, která odpovídají rizikovému kapitálu, musí být dobré kvality.

Zásadní předpoklady stanovení RK I

I. Jakým způsobem bude pojišťovna nadále provozovat svou činnost.

- Going concern – předpokládá se, že společnost je schopna beze změn pokračovat ve své činnosti, zejména, že bude upisovat nové pojistné obchody.
- Run-off – popisuje situaci, kdy pojišťovna přestane upisovat nové pojistné obchody. Přesto se předpokládá, že bude schopna dostát všem svým závazkům, a to až do konce pojistné doby všech stávajících pojistných kontraktů. Pojistný kmen se tedy bude jen zmenšovat, administrativní náklady budou tvořit stále významnější část finančních toků. Oproti přístupu going concern je tedy potřeba vyšších hodnot rizikového kapitálu.
- Break-up (též wind-up) – tato metoda je založena na předpokladu, že společnost zcela ukončí svou činnost a pokusí se vyrovnat veškeré svoje závazky, k čemuž použije veškerý svůj majetek, je-li to potřeba. S tím je spojen i nevýhodný okamžitý prodej aktiv¹⁾.

1) Viz [7].

Zásadní předpoklady stanovení RK II

II. Časový horizont:

- 1 rok, ..., ∞ .

III. Způsob oceňování aktiv a závazků:

- lokální účetnictví;
- tržní hodnota.

IV. Výběr zahrnutých rizik.

V. Použitá míra rizika.

Míry rizika

- Necht' X je reálná náhodná veličina označující ztrátu za určité období (zápornou ztrátou rozumíme zisk), buď $\mathcal{X}$ množina těchto náhodných veličin. Mírou rizika rozumíme zobrazení $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Po míře rizika přirozeně požadujeme určité vlastnosti. Moderní jsou tzv. koherentní míry rizika (viz např. [2]), které splňují následující vlastnosti:
 - (i) translační invariance: $\forall X \in \mathcal{X}, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \rho(X + \alpha) = \rho(X) + \alpha$;
 - (ii) subaditivita: $\forall X, Y \in \mathcal{X}: \rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$;
 - (iii) pozitivní homogenita: $\forall X \in \mathcal{X}, \forall \lambda \geq 0 \in \mathbb{R}: \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$;
 - (iv) monotonie: $\forall X, Y \in \mathcal{X}, X \leq Y: \rho(X) \leq \rho(Y)$.
- Princip směrodatné odchylky (SDP):

$$\text{SDP}(X) = E(X) + k\sqrt{\text{var}(X)}, k > 0.$$

Není koherentní mírou rizika, neboť není obecně monotónní.

Postačující podmínka pro koherenci VaR

- Hodnota v riziku (VaR): necht' $\alpha \in (0,1)$, potom hodnotu v riziku na hladině α definujeme vztahem

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R}: P(X \leq x) \geq \alpha\},$$

neboli $\text{VaR}_\alpha(X)$ je α -kvantil pravděpodobnostního rozdělení ztráty za určité období.

- Není koherentní, neboť není obecně subaditivní. Postačující podmínkou ke koherenci je, že X má tzv. eliptické rozdělení, tj. jeho hustotu lze vyjádřit jako $f_X(x) = \frac{C}{\sigma} g\left(\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$, kde $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ je nerostoucí, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ a C je normalizační konstanta [11].
- Do rodiny eliptických rozdělení patří např. normální rozdělení (pro $g(z) = e^{-z/2}$, $C = 1/\sqrt{2\pi}$) či studentovo t -rozdělení o k -stupních volnosti (pro $g(z) = (1 + z/k)^{-(k+1)/2}$, $\mu = 0$, $\sigma = 1$, $C = \frac{\Gamma(k+1/2)}{\Gamma(k/2)\sqrt{k\pi}}$, $k \in \mathbb{N}$).

TVaR, CVaR a jejich vztah

- Další užívanou mírou rizika je zbytková hodnota v riziku (TVaR): je-li $EX^+ < \infty$, potom zbytkovou hodnotou v riziku na hladině α definujeme vztahem

$$\text{TVaR}_\alpha(X) = E(X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)),$$

jde tedy o střední hodnotu ztrát hodnoty vyšších nebo rovných $\text{VaR}_\alpha(X)$. Takto definovaný $\text{TVaR}_\alpha(X)$ také není obecně koherentní, postačující podmínkou je spojitost rozdělení.

- Obecně koherentní mírou rizika je podmíněná hodnota v riziku (CVaR): je-li $EX^+ < \infty$, potom zbytkovou hodnotou v riziku na hladině α definujeme vztahem

$$\text{CVaR}_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X) du.$$

- Má-li X spojitě rozdělení, potom platí $\text{TVaR}_\alpha(X) = \text{CVaR}_\alpha(X)$ [1].

Metody výpočtu rizikového kapitálu I

- Faktorové metody – rizikový kapitál se vypočte jako vhodný násobek objemové pojistné veličiny: např. pojistného, technických rezerv, pojistné částky nebo průměrného pojistného plnění za určité období v minulosti. Příslušné koeficienty se určí většinou na základě historických pozorování pojistného trhu.

Solventnost I – EHP.

- Metody založené na teorii ruinování. V její klasické verzi, Cramérově-Lundbergově modelu – jsou jedinými zahrnutými riziky náhodné chování počtu a výše škod: zajímá nás pravděpodobnost ruinování

$$\psi(u) := P(\inf_{t>0} \{ U_t < 0 \} < \infty), \text{ kde}$$

$U_t = u + ct - S_t$ je výše rizikového kapitálu v čase $t > 0$, $u \geq 0$ je počáteční výše rizikového kapitálu, $c \geq 0$ je intenzita spojitě placeného pojistného za jednotku času a S_t je úhrn škod nastalých do času t .

Metody výpočtu rizikového kapitálu II

- Metody rizikově váženého kapitálu – rizikový kapitál se vypočte nejdříve zvlášť pro každý vybraný typ rizika (např. tržního, upisovacího, kreditního či likviditního) či jejich podsložky (např. u tržního rizika pro měnové, akciové, úrokové či nemovitostní). Při výpočtu celkového rizikového kapitálu se pak zohlední možný diverzifikační efekt mezi jednotlivými riziky.
 - RBC (Risk-based capital) – USA (NAIC), Japonsko (FSA);
 - SST (Solvency Swiss Test) – Švýcarsko (FINMA);
 - C-ROSS (China Risk Oriented Solvency System) – Čína (CIRC);
 - Solventnost II – EHP.

Solventnost I

- Výpočet rizikového kapitálu pro pojišťovny provozující činnost v EHP podléhá od roku 2002 legislativnímu režimu, který se vžil pod názvem Solventnost I.
- Vzhledem k tomu, že se jedná o směrnice, u kterých je závazný pouze stanovený cíl, a nejde o nařízení, která jsou přímo závazná, měly jednotlivé státy prostor pro vlastní úpravu při začleňování tohoto práva do národních legislativ. Tento fakt vedl k tomu, že mezi jednotlivými státy docházelo v jeho implementaci k různým odchylkám.
- Výpočet rizikového kapitálu užitý v Solventnosti I vychází podstatným způsobem z přístupů zavedených již dříve směrnicemi Rady Evropských společenství v 70. letech (tzv. první směrnice o neživotním pojištění a první směrnice o životním pojištění).

Solventnost I a ŽP – Campagnova metoda

- Pro základní typy kapitálového pojištění byl v Solventnosti I rizikový kapitál stanoven jako: $RK = 0,04 V_M + 0,003 CaR$, kde V_M je matematická rezerva a CaR kapitál v riziku.
- Vychází částečně z přístupu prof. Campagne a z jeho zprávy pro OEEC z roku 1961 [23], jež ale vycházela v životním pojištění z jeho dřívějšího výzkumu z roku 1948 [3].
- Buď V rezerva pojistného na počátku ročního období, buď Z ztráta za toto období, položíme $X = Z/V$. Buď f_X hustota náhodné veličiny X , předpokládejme, že je spojitá. Známe-li f_X , potom lze stanovit $\alpha > 0$ tak, aby platilo $\int_{\alpha}^{\infty} f_X(x) dx = \varepsilon$, a tedy $P(Z > \alpha V) = \varepsilon$, pro vhodně zvolené $\varepsilon > 0$.
- Podkladem pro Campagnovu práci byla data 10 největších nizozemských pojišťoven z let 1926-1945, měl tedy k dispozici celkem 200 pozorování Z_i/V_i , která považoval za nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny s Pearsonovým rozdělením IV. typu, a na jejichž základě odhadl

$$\hat{f}_X(x) = 31,73 \left[1 + \left(x + 2,399 / 5,442 \right)^2 \right]^{-4,85} e^{2,226 \arctan(x + 2,399 / 5,442)}.$$

Např. pro $\varepsilon = 0,05$ tak Campagne došel k $\alpha = 0,035$.

Solventnost I a ŽP – Buolova zpráva

- Výpočet RK zahrnující jak V_M , tak CaR byl uveden v tzv. Buolově zprávě, vytvořené pracovní skupinou OECD ([22]). Vlastní model vychází ze dvou různých výpočtů matematické rezervy. Ta byla nejprve vypočítaná na počátečních předpokladech (na kterých bylo stanoveno pojistné) a podruhé s týmž pojistným, ale s nižší úrokovou mírou (za vhodnou velikost nové bylo bráno 80 % původní).
- Např. pro smíšené pojištění měl být rizikový kapitál na počátku t -tého roku pojištění stanoven jako: $RK_t = (A'_{x+t, \overline{n-t}|} - P\ddot{a}'_{x+t, \overline{n-t}|}) - (A_{x+t, \overline{n-t}|} - P\ddot{a}_{x+t, \overline{n-t}|}) = V'_{x+t, \overline{n-t}|} - V_{x+t, \overline{n-t}|} + (P' - P)\ddot{a}'_{x+t, \overline{n-t}|}$, kde $A_{x+t, \overline{n-t}|}$, $\ddot{a}_{x+t, \overline{n-t}|}$, P , $V_{x+t, \overline{n-t}|}$ jsou vypočtené na původních předpokladech a $A'_{x+t, \overline{n-t}|}$, $\ddot{a}'_{x+t, \overline{n-t}|}$, P' , $V'_{x+t, \overline{n-t}|}$ na předpokladech s nižší úrokovou mírou. Na základě tohoto modelu bylo navrženo držet rizikový kapitál ve výši $RK_t = 0,09 V_M + 0,06 CaR$.
- Pro nerezervotvorná pojištění byl použit přístup teorie rizika a bylo navrženo vytvořit speciální rezervu u ve výši $u = \frac{0,025}{\lambda} P + \frac{8}{\lambda} \bar{S}$, kde λ je bezpečnostní přírážka obsažená v pojistném, P je nettopojistné a $\bar{S}$ je odhad střední hodnoty škod.

Solventnost I a ŽP – původ parametrů

- Najít byt' základní matematické odvození toho, proč byly v původní první směrnici o životním pojištění 79/267/EHS (a i v Solventnosti I) pro výpočet rizikového kapitálu použity v životním pojištění právě koeficienty 0,04 pro technické rezervy a 0,003 pro kapitál v riziku, je značně obtížné. První koeficient byl zřejmě inspirován Campagnovým přístupem.
- Pracovní skupina, ustavená na Faculty of Actuaries in Scotland v roce 1980, která se zabývala solventností životních pojišťoven, se mimo jiné zaměřila i na původ výše uvedených koeficientů. V její závěrečné zprávě [16] je uvedeno:

„The net result of several months' investigations in many areas is most unsatisfactory and is summarised by the reply of the Supervisory Authority of one of the original E.E.C. Member States to our enquiries on the point. The reply said: 'The rules are purely set through negotiations and are a compromise reflecting each Member State's positions and interest.'“

- A jak je to dnes v Solventnosti II?

Solventnost I a NŽP

$$RK = \max([0,26 \min(\bar{S}, 35\,000\,000) + 0,23 \max(\bar{S} - 35\,000\,000, 0)] \max(k, 0,5), \\ [0,18 \min(P, 50\,000\,000) + 0,16 \max(P - 50\,000\,000, 0)] \max(k, 0,5)),$$

kde P je předepsané hrubé pojistné (ponížené o částky pojistného odpovídající daním a poplatkům, pokud jsou vybírané s pojistným a pokud jsou zahrnuty v předepsaném hrubém pojistném), $\bar{S}$ je třetina ze součtu vyplaceného hrubého pojistného plnění z přímého pojištění a plnění z převzatého zajištění, od kterého odečteme příjem z regresů a upravíme ho o změnu stavu rezervy na pojistná plnění, to vše za poslední tři účetní období; referenční období se zvyšuje na sedm let u těch pojišťoven, které dle [13] „převážně pojišťují jen jedno riziko nebo více z těchto rizik: úvěry, vichřice (bouře), krupobití, mrazy”. Dále k značí poměr pojistných plnění na vlastní vrub za poslední tři účetní období k celkovým pojistným plněním (tj. včetně plnění ze zajištění) za poslední tři účetní období. (Částky jsou v eurech).

- Neuvažujeme-li zajištění, pak vlastně je-li $\bar{S}/P$ je větší, než přibližně 0,7 (neboť $0,18/0,26 \approx 0,16/0,23 \approx 0,7$), potom se RK stanovuje z $\bar{S}$, v opačném případě se stanovuje z P .

Solventnost I a NŽP – původ parametrů

- Campagnova metoda ([22]): nechť S je náhodná veličina vyjadřující celkovou výši škod a buď P^Z náhodná veličina označující zasloužené pojistné (oboje upraveno o zajištění). Předpokládejme, že k pokrytí nákladů pojišťovny je potřeba konstantní násobek pojistného kP^Z , $k \in (0, 1)$. Zajímá nás α takové, že pro vhodně zvolené $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$P(S/P^Z > \alpha) = \varepsilon, \text{ neboli } P(S + kP^Z > P^Z + (\alpha + k - 1)P^Z) = \varepsilon.$$

- Na základě dat osmi evropských států z let 1952-1957 bylo nakonec navrženo, aby cílový rizikový kapitál byl stanoven jako součet 25 % zaslouženého pojistného a 2,5 % zaplaceného zajistného (zohledňujícího riziko zajištění). Také byla stanovena minimální hranice ve výši 250 000 EMA zúčtovacích jednotek (zúčtovací jednotka, odpovídající 0,88867088 gramům ryzího zlata).
- Metoda de Moriho: $RK = \max(0,24 P^P, 0,34 \bar{S}, 0,19 V^T)$, kde P^P je přijaté pojistné, $\bar{S}$ je průměrná výše škod během posledních tří let, a V^T je výše technických rezerv ([21]).

2

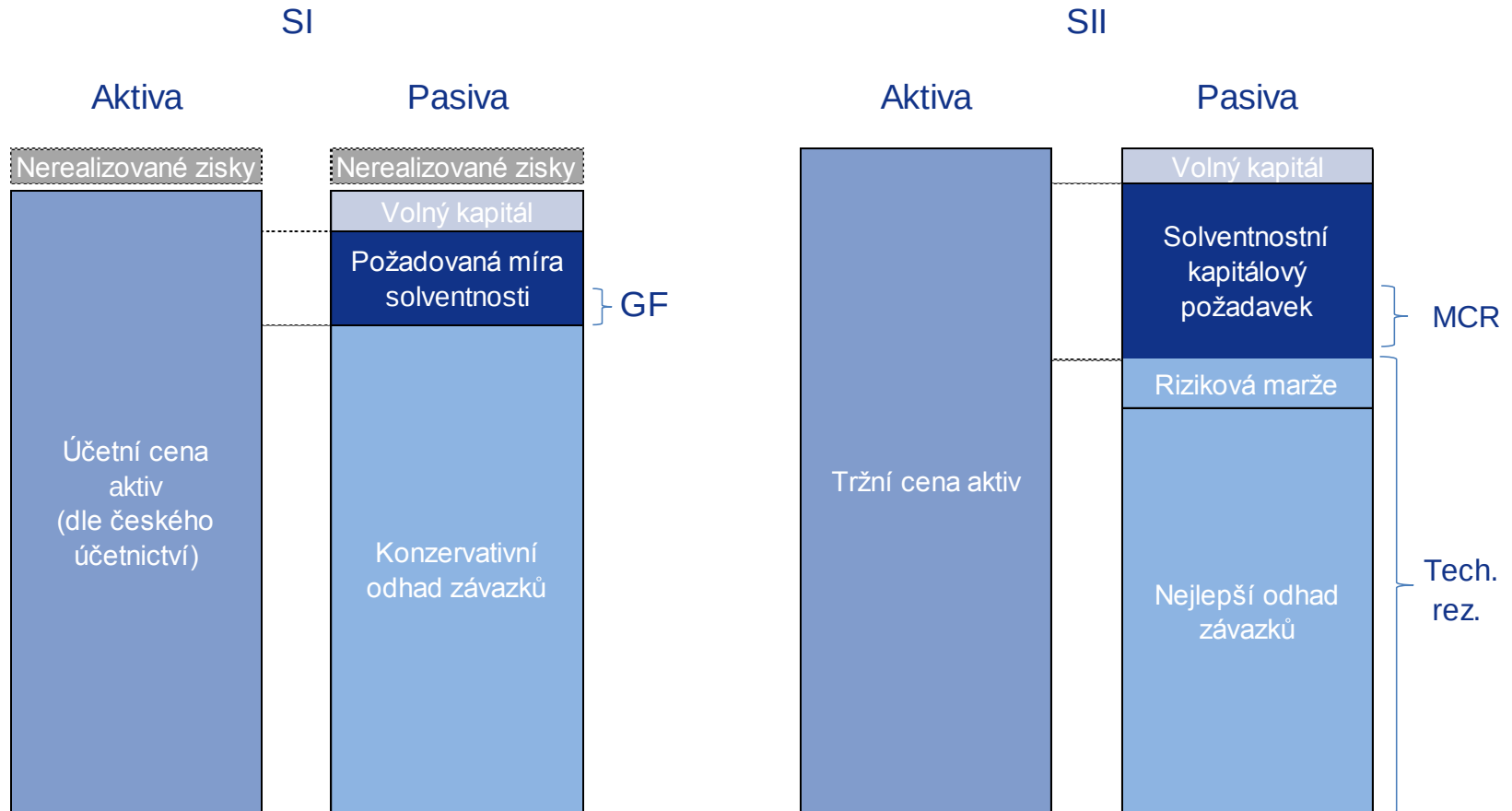
- 1 Rizikový kapitál
- 2 Solvency II a životní upisovací riziko**
- 3 Riziko dlouhověkosti

Solventnost II



- Směrnice Evropského parlamentu a Rady 2009/138/ES ze dne 25. listopadu 2009 o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II) (Přepracované znění) ([14]).
- Původní termín účinnosti byl 31. 12. 2012, platný termín účinnosti je 1. 1. 2016. V ČR bude tento režim zaveden novelou zákona o pojišťovnictví (zákon č. 277/2009 Sb.) – 8. 4. 2015 proběhlo její první čtení v Poslanecké sněmovně.
- SII se vztahuje nejen na pojišťovny a zajišťovny se sídlem v EHP:
 - také na jimi ovládané poj. a zajišťovny se sídlem mimo EHP;
 - v případě, že jsou ovládány pojišťovací holdingovou společností se sídlem mimo EHP, SII režim má dopad i na tuto společnost.
- Princip rovnocennosti (či prozatímní rovnocennosti) solventnostního režimu státu mimo EHP (Švýcarsko, Japonsko, Bermudy).

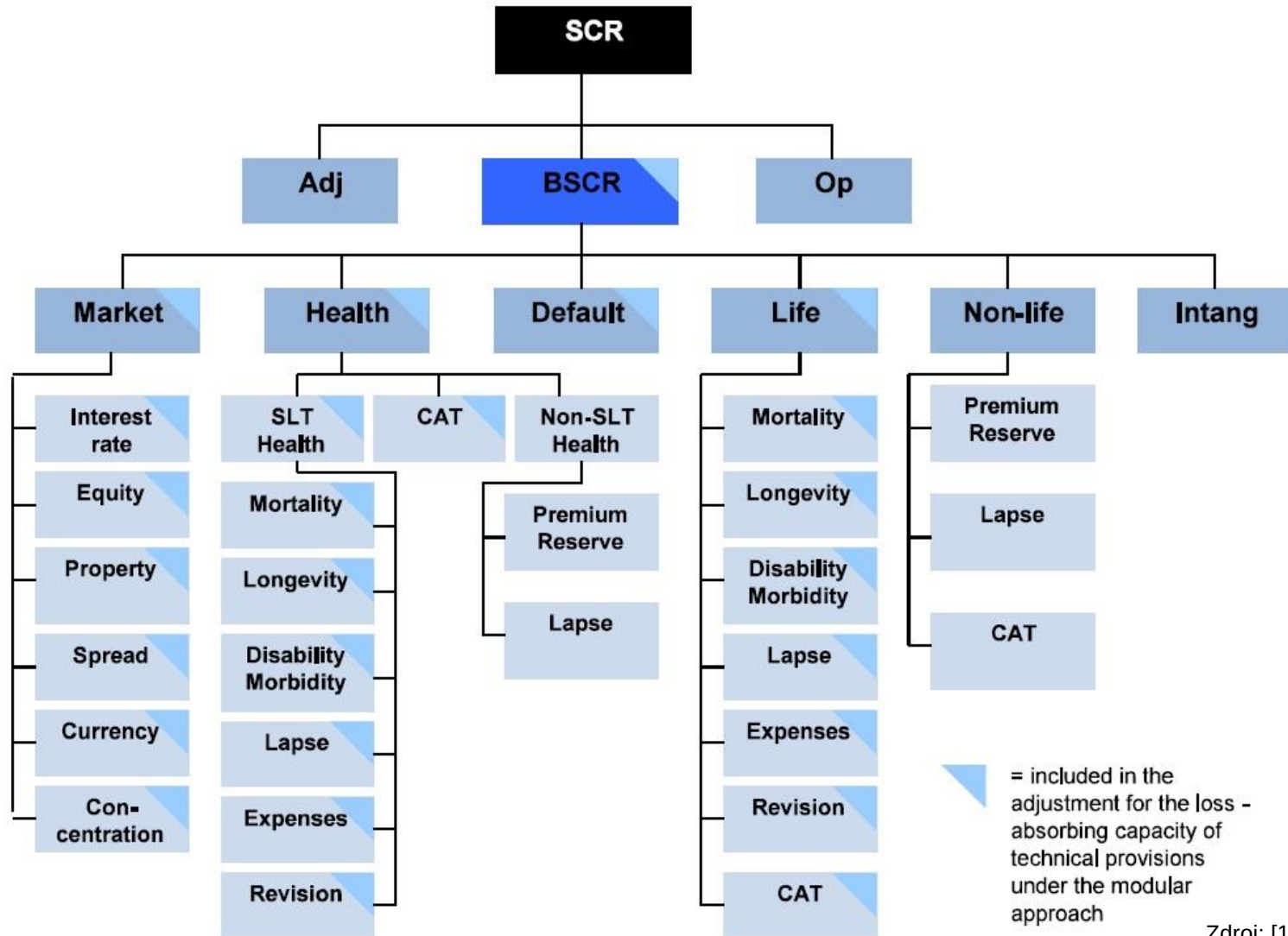
Solventnost II – Rozvaha



Solventnost II – způsoby výpočtu SCR

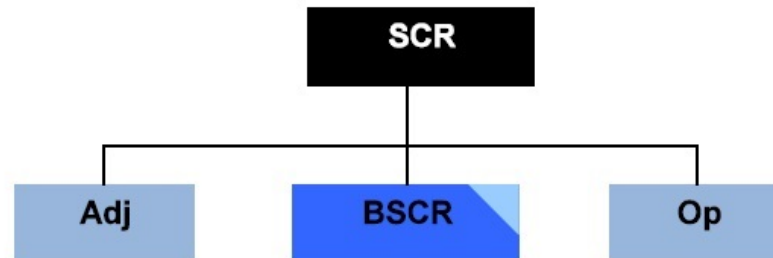
- Způsoby výpočtu SCR:
 - standardní formule;
 - standardní formule s parametry specifickými pro pojišťovnu;
 - standardní formule se zjednodušeními;
 - interní model (částečný či úplný).
- Výpočet SCR je ve standardní formuli je kalibrován na hodnotu v riziku primárního kapitálu na hladině 99,5 % v časovém horizontu jednoho roku [14].
- Výpočet MCR je kalibrován na hodnotu v riziku primárního kapitálu na hladině 85 % v časovém horizontu jednoho roku [14].
- Primární kapitál tvoří hodnota aktiv převyšující hodnotu závazků snižena o hodnotu vlastních akcií držných tuzemskou pojišťovnou nebo tuzemskou zajišťovnou a hodnota podřízených závazků [14].

Standardní vzorec pro výpočet SCR



Zdroj: [10]

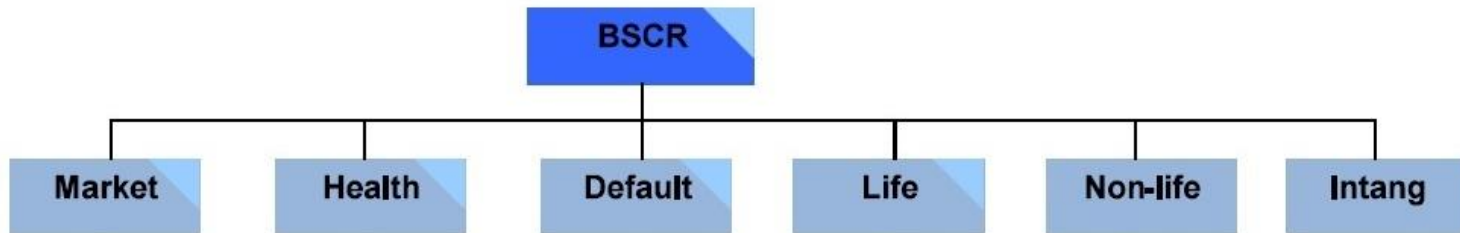
Výpočet SCR dle standardního vzorce



$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{Op}, \text{ kde}$$

- $BSCR$... základní SCR;
- Adj ... úprava o schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty;
- SCR_{Op} ... kapitálový požadavek k operačnímu riziku,
platí: $SCR_{Op} = \min(0,3 BSCR, Op) + 0,25 Exp_{ul}$, kde
 Op je základní kapitálový požadavek k operačnímu riziku,
 Exp_{ul} je objem nákladů za poslední rok na smlouvy, kde investiční riziko nese pojistník.

Výpočet BSCR dle standardního vzorce



$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} \text{Corr}_{i,j} SCR_i SCR_j} + SCR_{Intang}, \text{ kde}$$

- SCR_i, SCR_j ... kapitálové požadavky k rizikům i, j , kde $i, j \in \{Market, Health, Default, Life, Non-Life\}$;
- $\text{Corr}_{i,j}$... koeficient korelace mezi rizikovým modulem i a rizikovým modulem j ;
- SCR_{Intang} ... je kapitálový požadavek k riziku nehmotných aktiv ($SCR_{Intang} = 0,8 IA$, kde IA je hodnota nehmotných aktiv).

i/j	Market	Health	Default	Life	Non-Life
Market	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Health	0,25	1	0,25	0,25	0
Default	0,25	0,25	1	0,25	0,5
Life	0,25	0,25	0,25	1	0
Non-Life	0,25	0	0,5	0	1

Životní upisovací riziko

$$SCR_{Life} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrL}_{i,j} Life_i Life_j}, \text{ kde}$$

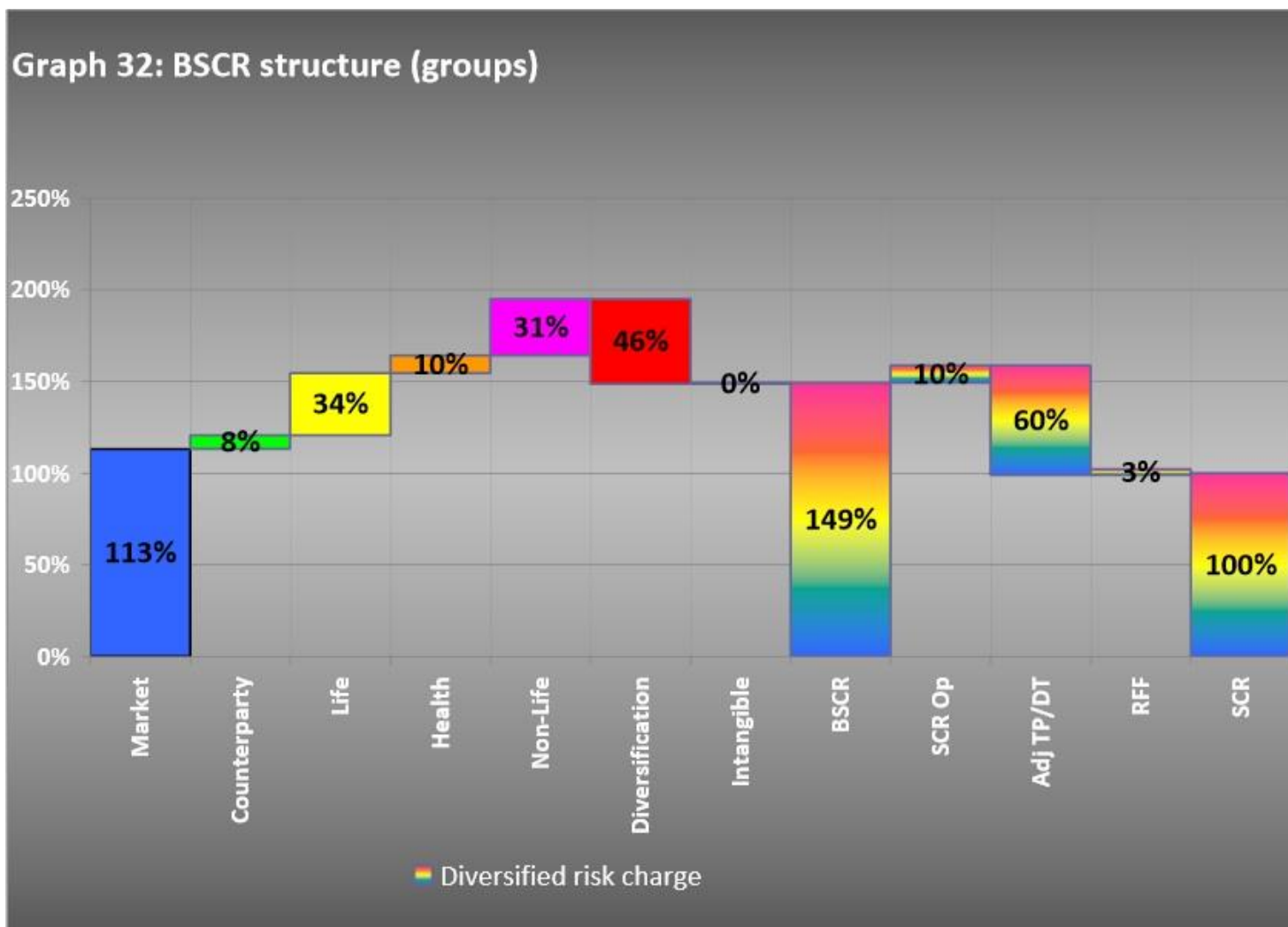
- $Life_i, Life_j$... kapitálové požadavky k subrizikům i, j , kde $i, j \in \{Mortality, Longevity, Disability/Morbidity, Lapse, Expenses, Revision, CAT\}$;
- $\text{CorrL}_{i,j}$... koeficient korelace mezi rizikovým submodule i a rizikovým submodule j .



i/j	Mortality	Longevity	Dis./Morbidity	Lapse	Expenses	Revision	CAT
Mortality	1	-0,25	0,25	0	0,25	0	0,25
Longevity	-0,25	1	0	0,25	0,25	0,25	0
Disability	0,25	0	1	0	0,25	0,25	0,25
Lapse	0	0,25	0	1	0,5	0	0,25
Expenses	0,25	0,25	0,5	0,5	1	0,5	0,25
Revision	0	0,25	0	0	0,5	1	0
CAT	0,25	0	0,25	0,25	0,25	0	1

- Při popisu jednotlivých životních upisovacích rizik čerpáme z [14], možná zjednodušení jsou uvedena v [10].

Životní upisovací riziko a výsledky QIS5



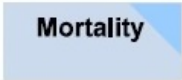
Riziko úmrtnosti

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající ze změn úrovně, vývoje nebo volatility měr úmrtnosti, kdy **zvýšení** míry úmrtnosti vede ke zvýšení hodnoty pojistných závazků.

$$Life_{Mortality} = (\Delta BOF \mid mortshock), \text{ kde}$$

- ΔBOF je ztráta primárního kapitálu v případě, že nastane *mortshock*, definovaný jako nárůst úrovně měr úmrtnosti o 15 %;
- ΔBOF při výpočtu nezahrnuje případnou změnu rizikové přírážky ani úpravu o schopnost technických rezerv a odložené daňové povinnosti absorbovat ztráty;
- zvýšení měr úmrtnosti se vztahuje pouze na ty pojistné smlouvy, u kterých vede ke zvýšení hodnoty technických rezerv bez rizikové přírážky.

Riziko úmrtnosti – kalibrace a zjednodušení

Mortality

Ad *mortshock* – proč 15 % (QIS5)? Přitom QIS2 20 %, QIS3, QIS4 10 %.

- Např. zpětná vazba na QIS 4 (21 interních modelů) – medián 22 % [5].
- Kalibrace QIS3 založena na studii britských pojišťoven společnosti Watson Wyatt z roku 2004 – průměr 23 % [4].

Zjednodušení:

$$Life_{Mortality} = 0,15 CAR q \sum_{k=1-0,5}^{n-0,5} \left(\frac{1-q}{1-i_k} \right)^k, \text{ kde}$$

- CAR ... celkový kapitál v riziku;
- q ... očekávaná průměrná míra úmrtnosti pojištěných osob v následujícím roce vážená pojistnou částkou;
- n ... modifikovaná durace výplat v případě smrti zahrnutých do nejlepšího odhadu (vyjádřená v letech);
- i_k ... označuje průměrný roční spotový kurz při splatnosti k .

Riziko dlouhověkosti, kalibrace

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající ze změn úrovně, vývoje nebo volatility měr úmrtnosti, kdy **snížení** míry úmrtnosti vede ke zvýšení hodnoty pojistných závazků.

$$Life_{Longevity} = (\Delta BOF | longevityshock), \text{ kde}$$

- *longevityshock* definovaný jako pokles úrovně měr úmrtnosti o 20 %;
- snížení měr úmrtnosti se vztahuje pouze na ty pojistné smlouvy, u kterých vede k navýšení hodnoty technických rezerv bez rizikové přírážky.

Ad *longevityshock* – proč 20 %? QIS5, QIS4 i QIS3 25 %...

- Zpětná vazba na QIS 4 – medián 25 % [5].
- Již zmiňovaná studie Watson Wyatt – průměr 18 %.
- Po QIS4 provedl CEIOPS historickou analýzu na datech devíti zemí z let 1992-2006: pozorované snížení úmrtnosti bylo v průměru větší, než 25 % [5].

Riziko dlouhověkosti – zjednodušení

Zjednodušení:

$$Life_{Longevity} = 0,2 q n 1,1^{(n-1)/2} BE_{Longevity}, \text{ kde}$$

- q ... očekávaná průměrná míra úmrtnosti pojištěných osob v následujícím roce vážená pojistnou částkou;
- n ... modifikovaná durace plateb oprávněným osobám zahrnutých do nejlepšího odhadu (vyjádřená v letech);
- $BE_{Longevity}$... nejlepší odhad závazků vyplývajících z rizika dlouhověkosti.

Riziko invalidity nebo pracovní neschopnosti a nemocnosti, kalibrace

Disability
Morbidity

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající ze změn úrovně, vývoje nebo volatility míry invalidity, míry chorobnosti a míry nemocnosti.

$Life_{Disability/Morbidity} = (\Delta BOF | disshock)$, kde

- *disshock* je definovaný jako kombinovaný šok, zahrnující zároveň zvýšení měr invalidity nebo pracovní neschopnosti a nemocnosti v prvním roce o 35 %, v následujících letech o 25 % a dále snížení měr uzdravení z invalidity, pracovní neschopnosti a nemocnosti 20 %.

Ad *disshock* – proč 35/25 % a 20 %? QIS5 50/25 % a 20 %, přitom QIS4 a QIS3 35/25 % a 0 %...

- Např. výzkum švédského dohledu po QIS4 na 22 pojišťovnách z let 2002-2007 50/25 % a 20 % ([5])...

Riziko invalidity nebo pracovní neschopnosti a nemocnosti – zjednodušení

Disability
Morbidity

Zjednodušení:

$$Life_{Disability/Morbidity} = 0,35 CAR_1 d_1 + 0,25 \cdot 1,1^{(n-3)/2} (n-1) CAR_2 d_2 + 0,2 \cdot 1,1^{(n-1)/2} t n BE_{dis}, \text{ kde}$$

- CAR_1 ... celkový rizikový kapitál v riziku, CAR_2 je totéž, ale za rok;
- d_1 ... očekávaná průměrná míra invalidity nebo míra pracovní neschopnosti a nemocnosti v příštím roce vážená pojistnou částkou; d_2 totéž, ale v přespříštím roce;
- n ... modifikovaná durace plateb v případě invalidity nebo pracovní neschopnosti a nemocnosti zahrnutých do nejlepšího odhadu;
- t ... očekávaná míra ukončení pojistných smluv v následujících dvanácti měsících;
- BE_{dis} ... nejlepší odhad závazků vyplývajících z rizika invalidity nebo pracovní neschopnosti a nemocnosti.

Riziko storen I

Lapse

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající ze změn úrovně nebo volatility míry storna, míry ukončení, míry obnovení a míry odbytného u pojistných smluv.

$$Life_{Lapse} =$$

$$\begin{cases} Life_{Lapse_up}, \text{ je-li } \max(nLife_{Lapse_up}, nLife_{Lapse_down}, nLife_{Lapse_mass}) = nLife_{Lapse_up} \\ Life_{Lapse_down}, \text{ je-li } \max(nLife_{Lapse_up}, nLife_{Lapse_down}, nLife_{Lapse_mass}) = nLife_{Lapse_down} \\ Life_{Lapse_mass}, \text{ jinak,} \end{cases}$$

- $Life_{Lapse_up} = (\Delta BOF \mid lapseshock_{up})$, kde $lapseshock_{up}$ je definovaný jako nárůst úrovně míry realizací příslušných možností o 50 % (s horní hranicí 100 %, nárůst úrovně se aplikuje pouze na ty možnosti, jež vedou k navýšení technických rezerv bez rizikové přírážky);
- $Life_{Lapse_down} = (\Delta BOF \mid lapseshock_{down})$, kde $lapseshock_{down}$ je definovaný jako nárůst úrovně realizací příslušných možností o 50 % (s dolní hranicí 20 %, nárůst úrovně se aplikuje pouze na ty možnosti, jež vedou ke snížení technických rezerv bez rizikové přírážky).

Riziko storen II

- $Life_{Lapse_mass} = (\Delta BOF \mid lapseshock_{mass})$, kde $lapseshock_{mass}$ je kombinací:
 - okamžitého ukončení 70 % pojistných smluv správy skupinových penzijních fondů (jejichž ukončení by vedlo k navýšení technických rezerv bez rizikové přírážky, navíc musí tyto splňovat dodatečné podmínky);
 - okamžitého ukončení 40 % ostatních pojistných smluv (jejichž ukončení vedlo k navýšení technických rezerv bez rizikové přírážky);
 - navíc, pokud zajistné smlouvy pokrývají pojistné nebo zajistné smlouvy, které budou sepsány v budoucnosti, snížení počtu těchto budoucích pojistných nebo zajistných smluv, které se používají při výpočtu technických rezerv, o 40 %.
- $nLife_{Lapse_up}$, $nLife_{Lapse_down}$, $nLife_{Lapse_mass}$ v sobě zahrnují schopnost technických rezerv absorbovat ztráty.

Riziko storen – kalibrace

- QIS4 šok na storna byl založen na studii velkých britských pojišťoven pro britskou FSA z roku 2004 [15], kde byl ovšem uvažován pouze lapseshock_{down} . Získané kvantily zvýšení storen:

Kvantil	87%	88%	89%	90%	91%	92%	93%	94%	95%	97,5%
Down	-25,8%	-26,7%	-27,6%	-28,5%	-29,3%	-30,3%	-31,7%	-33,0%	-34,5%	-39,0%

Navíc 99,5% kvantil byl pro QIS4 pouze extrapolován („Nevertheless, the QIS4 calibration of -50% can be justified“, [5]), a lapseshock_{up} byl uvažován pouze jednoduše jako symetrický šok.

- Dále, polský dohledový orgán nad finančním trhem provedl studii na datech z let 2004-2007(!) s výrazně vyššími výsledky než uvažovaných 50 % ([5]). Pro jednotlivé roky od počátku smlouvy byly výsledkem analýzy následující šoky:

rok	1	2	3	4	5	>5
Up	104%	84%	74%	65%	74%	67%
Down	-87%	-86%	-79%	-69%	-82%	-69%

- lapseshock_{mass} : nedostatek dat.

Riziko storen – zjednodušení

Zjednodušení: ($Life_{Lapse_mass}$ nemá)

$Life_{Lapse_up} = 0,5 l_{up} n_{up} S_{up}$, $Life_{Lapse_down} = 0,5 l_{down} n_{down} S_{down}$, kde

- l_{up} ... max(67 %, očekávaná průměrná míra storen pojistných smluv s kladným zůstatkem²⁾ technických rezerv);
- n_{up} ... průměrná doba v letech, po které vyprší pojistné smlouvy s kladným zůstatkem technických rezerv;
- S_{up} ... součet kladných zůstatků technických rezerv;
- l_{down} ... max(40 %, očekávaná průměrná míra storen pojistných smluv se záporným zůstatkem technických rezerv);
- n_{down} ... průměrná doba v letech, po které vyprší pojistné smlouvy se záporným zůstatkem technických rezerv;
- S_{down} ... součet záporných zůstatků technických rezerv.

2) zůstatek tech. rezerv: rozdíl mezi aktuální hodnotou částky vyplacenou v případě ukončení ze strany pojistníka a výší tech. rezerv bez rizikové přírážky.

Riziko nákladů v životním pojištění

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající ze změn úrovně, vývoje nebo volatility nákladů vzniklých při správě pojistných a zajistných smluv.

$$Life_{Expenses} = (\Delta BOF | expshock), \text{ kde}$$

- *expshock* je kombinací růstu nákladů o 10 % a zvýšení míry inflace nákladů o 1 procentní bod;

Kalibrace: QIS3.

$$\text{Zjednodušení: } Life_{Expenses} = 0,1 EI n + \left[\frac{(1+i+0,01)^n - 1}{i+0,01} - \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] EI, \text{ kde}$$

- *EI* ... výše nákladů v posledním roce vzniklých při správě pojistných nebo zajistných závazků v životním pojištění;
- *n* ... označuje modifikovanou duraci peněžních toků zahrnutých do nejlepšího odhadu těchto závazků (v letech);
- *i* ... označuje váženou průměrnou míru inflace zahrnutou do výpočtu nejlepšího odhadu těchto závazků.

Riziko revize

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající z kolísání úrovně, vývoje nebo volatility revizních sazeb uplatňovaných na důchody, které jsou dány změnami v právním prostředí nebo zdravotním stavu pojištěných osob.

$$Life_{Revision} = (\Delta BOF | revshock), \text{ kde}$$

- *revshock* je okamžité trvalé zvýšení důchodových dávek hrazených pouze z pojistných a zajistných závazků spojených s výplatou důchodů o 3 %, pokud by se tyto důchody vyplácené podle příslušných pojistných smluv mohly zvýšit v důsledku změn v právním prostředí nebo změn zdravotního stavu pojištěné osoby.

Kalibrace na základě historických dat z Portugalska u pojištění zaměstnanců pro případ pracovního úrazu nebo nemoci.

Zjednodušení: není definováno.

Životní katastrofické riziko

CAT

Riziko ztráty nebo nepříznivé změny hodnoty pojistných závazků vyplývající ze značné neurčitosti předpokladů při tvorbě cen a stanovení rezerv v souvislosti s mimořádnými nebo zvláštními událostmi.

$$Life_{CAT} = (\Delta BOF | lifeCATshock), \text{ kde}$$

- *lifeCATshock* okamžité zvýšení měr úmrtnosti o 0,15 procentního bodu po následující rok, a to u smluv, kde vede k navýšení hodnoty technických rezerv bez rizikové přírážky.
- Proč 0,15? CEIOPS se domnívá se, že španělská chřipka, která způsobila navýšení přibližně o 0,5, reprezentuje dobře katastrofu, jež nastane jednou za 200 let a spoléhá na zlepšení lékařské péče [5].
- V QIS4 využity také výsledky pandemického modelu SwissRe [27]: 0,1-0,15 ve vyspělých státech, 0,15-0,4 v rozvojových státech.
- Možné zjednodušení: $Life_{CAT} = \sum_{i: CAR_i > 0} 0,0015 CAR_i$, kde CAR_i je kapitál v riziku smlouvy i .

3

- 1 Rizikový kapitál
- 2 Solvency II a životní upisovací riziko
- 3 Riziko dlouhověkosti**

Prodlužování střední délky lidského života

- Prodlužování střední délky lidského života můžeme pozorovat nejen ve vyspělých státech.
- Souvisí primárně s vývojem lékařské vědy a zdravotnictví, se zlepšováním kvality lidského života, rostoucím bohatstvím společnosti a také jeho stabilitou.
- V ČR se mezi roky 2001-2011 prodloužila střední délka života při narození: mužů vzrostla o 2,6 roku (na 74,7 let), u žen pak došlo k nárůstu o 2,3 roku, a to na 80,7 let ([8]).
- Je zřejmé, že pro pojištění, kde úmrtnost hraje významnou roli, je vhodné do pojistně-matematických výpočtů zahrnout očekávaný vývoj úrovně úmrtnosti v čase. Jedním z přístupů, které slouží k modelování budoucího vývoje úmrtnosti, je Leeova–Carterova metoda (publikovaná v [20]).
- Vlastnosti tohoto modelu nám navíc umožní generovat různé scénáře.

Riziko dlouhověkosti a výsledky QIS5



Zdroj: [9]

Leeův–Carterův model

- Středním stavem obyvatelstva v roce t rozumějme počet obyvatel daného území v polovině roku t (tj. k 1. 7.), buď $m_{x,t}$ specifická míra úmrtnosti ve věku x v roce t , definovaná jako podíl zemřelých ve věku x v roce t a středního stavu obyvatelstva daného věku v roce.
- Leeův-Carterův model předpokládá, že $m_{x,t}$ lze popsat vztahem

$$\ln(m_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{x,t}, \text{ kde} \quad (1)$$

- $t = 1, \dots, n$, $x = 0, \dots, \omega$ (ω označuje skupinu ve věku ω a více);
- α_x charakterizuje průměrnou úroveň specifické míry úmrtnosti ve věku x ;
- κ_t vystihuje vývoj úrovně úmrtnosti v čase;
- β_x popisuje citlivost věkové skupiny x vzhledem ke κ_t ;
- $\varepsilon_{x,t} \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$, reprezentuje náhodnou chybu modelu (např. věkově specifické historické vlivy nezachytitelné modelem).

Leeův–Carterův model – odhad parametrů

- V takto definovaném modelu nejsou jeho parametry určeny jednoznačně, neboť pro dané $\alpha_x, \beta_x, \kappa_t$ vztah (1) splňuje i trojice i $\alpha_x - c_1 c_2 \beta_x, c_1 \beta_x, \kappa_t / c_1 + c_2$.
- Pro jednoznačnost řešení je nutné zvolit navíc počáteční omezující podmínky; ve shodě s [20] položíme:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \beta_x = 1, \quad \sum_{t=1}^n \kappa_t = 0. \quad (2)$$

- Buď $\mathbf{M}$ matice typu $(\omega + 1) \times n$ obsahující $\ln(m_{x,t})$, označme hledané parametry $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{\omega})^T$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \dots, \beta_{\omega})^T$, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_t)^T$.
- Za podmínky (2) získáme jednotlivé složky $\boldsymbol{\alpha}$ jako $\alpha_x = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln(m_{x,t})$, neboli $\boldsymbol{\alpha}^T = \mathbf{M} \frac{1}{n} \mathbf{1}_n$, kde $\mathbf{1}_n = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.
- Zbývá odhadnout $\boldsymbol{\beta}$ a $\boldsymbol{\kappa}$. Označme $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{1}_n^T$. Tuto matici vlastně chceme aproximovat maticí $\boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\kappa}^T$ o hodnoti 1. K tomu je možné použít např. singulární rozklad matice $\mathbf{M}^*$.

Leeův–Carterův model – predikce

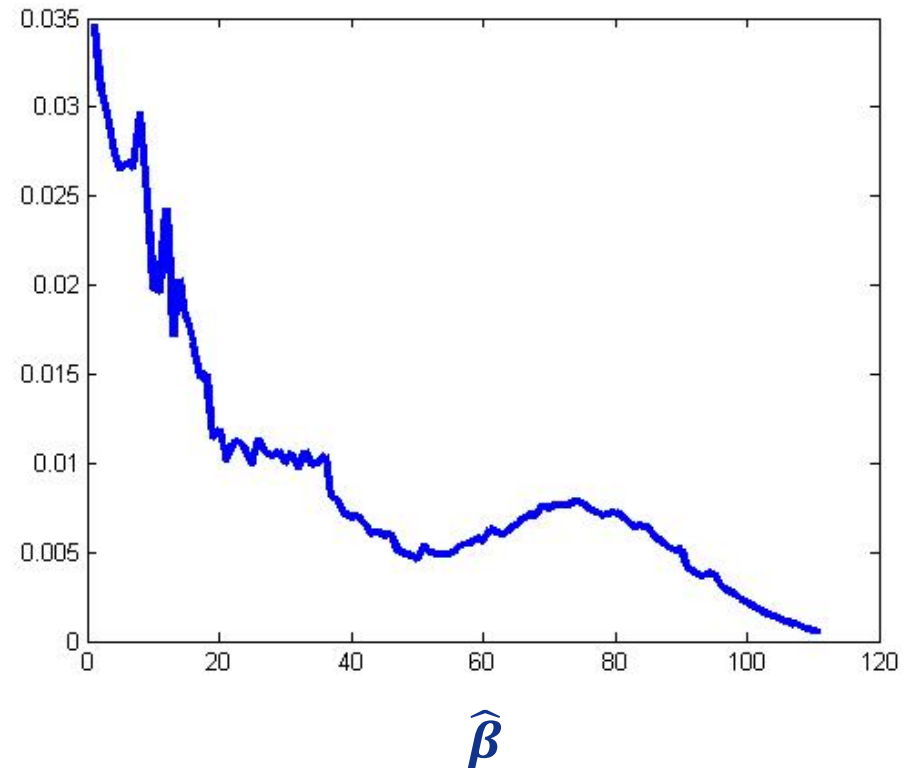
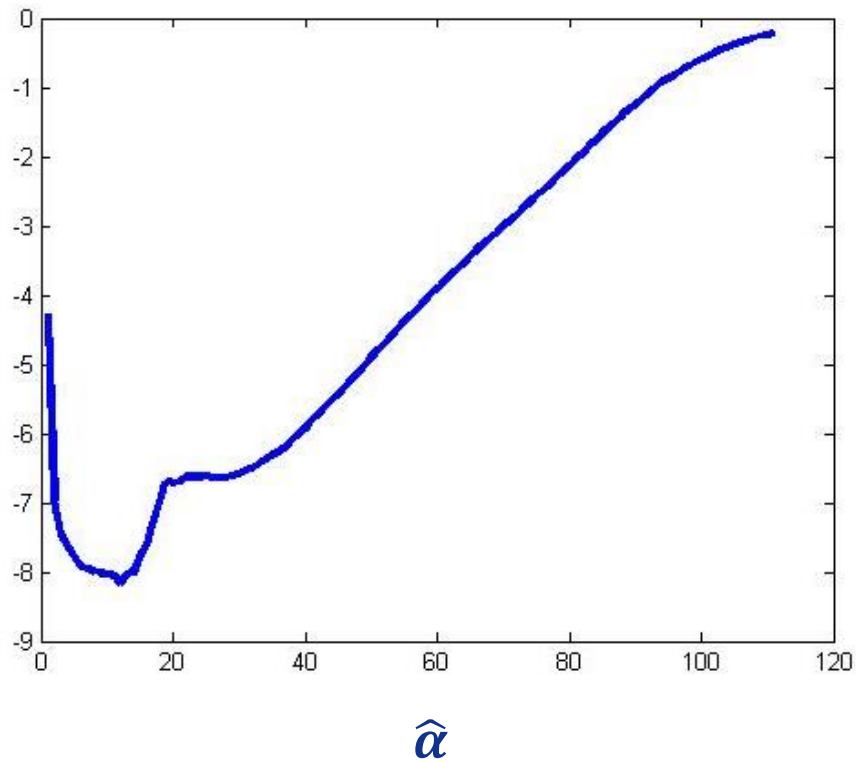
- Takto získané odhady α , β a κ ovšem nezaručují, že modelovaný počet úmrtí v celé populaci v roce t je roven původním pozorovaným hodnotám. Vzhledem k tomu, že takový požadavek je rozumný, ještě přistoupíme k novému odhadu parametru κ , a to tak, aby pro jednotlivé $t = 1, \dots, n$ bylo za již stanovených odhadech α a β splněno:

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_{x,t} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{x,t} e^{\alpha_x + \beta_x \kappa_t},$$

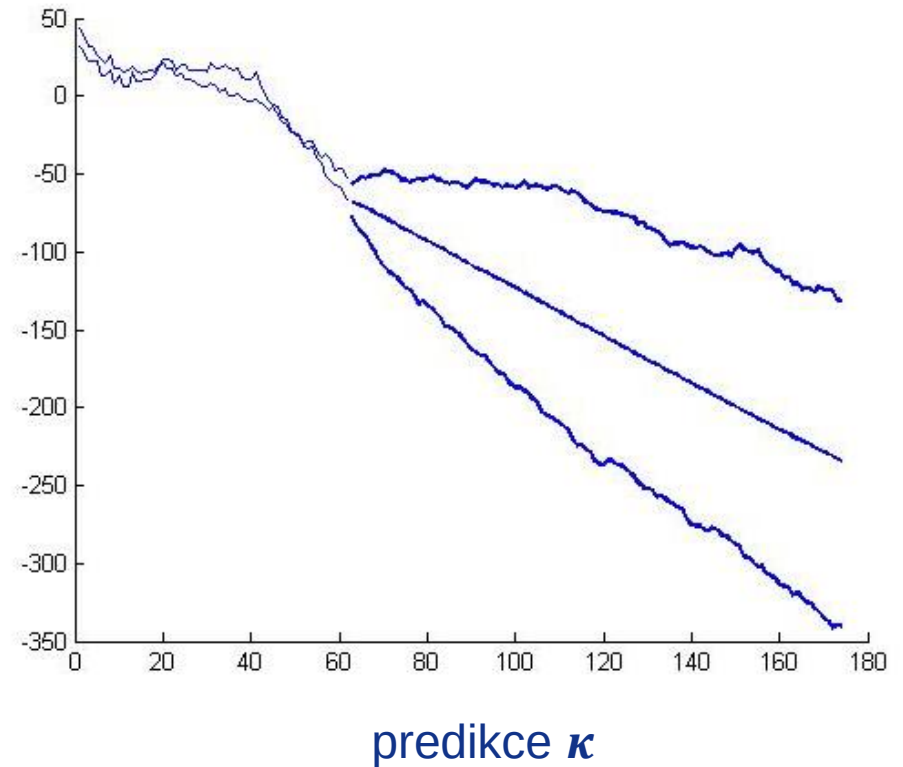
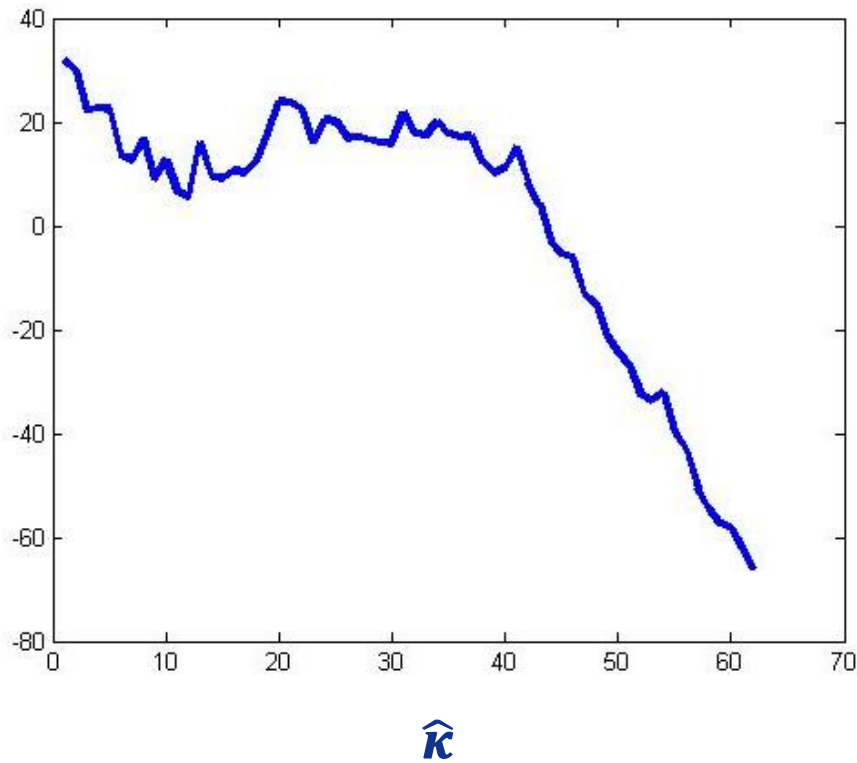
kde $d_{x,t}$ je počet zemřelých ve věku x v roce t a $e_{x,t}$ je střední stav populace věku x v roce t .

- Pro predikci budoucích $m_{x,t}$ nyní potřebujeme pouze získat odhady κ_t pro $t > n$. K tomu je možno užít např. vhodného ARIMA modelu.
- Odhady pravděpodobnost úmrtí ve věku x pro roky $t > n$ získáme ze vztahu $q_{x,t} = 1 - e^{-m_{x,t}}$ (dále je vhodné použít některou z vyrovnávacích metod).
- Výše popsaným postupem jsme získali generační úmrtnostní tabulky.
- Zdroj dat: výzkumné demografické stránky www.mortality.org, obsahující i data ČR z let 1950-2011 pro věky $x = 0, \dots, 110$, rozdělená dle pohlaví.

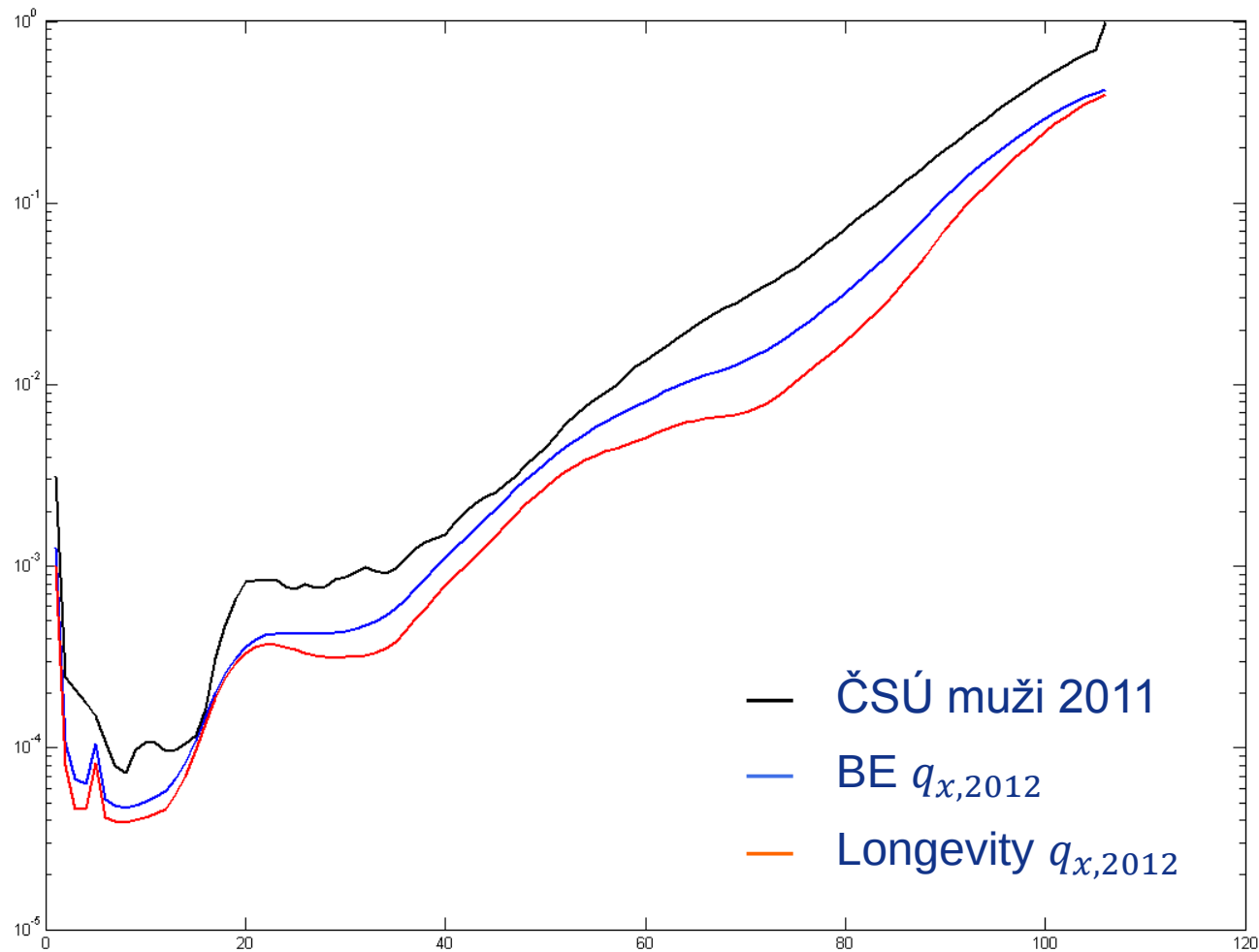
LC model – odhadnuté parametry (muži)



LC model – odhadnuté parametry (muži)



LC model – příklad: odhadnuté $q_{x,2012}$ (muži)



Otázky, komentáře?

Děkuji za pozornost

Literatura I

- [1] Acerbi, C., Tasche, D.: On the coherence of expected shortfall, Journal of Banking & Finance, č. 26 (7), s. 1487-1503, 2002.
- [2] Artzner, et al.: Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance, č. 9 (3), s. 203-228, 1999.
- [3] Campagne, C.: Contribution to the method of calculating the stabilization reserve in life assurance business, Gedenkboek Verzekeringskamer, 1923-1948, s. 338–378, 's-Gravenhage: Staatsdrukkerij- en Uitgeverijbedrijf, 1948.
- [4] CEIOPS: QIS3 Calibration of the underwriting risk, market risk and MCR, 2007.
- [5] CEIOPS: QIS5 Calibration Paper, 2010.
- [6] CEIOPS: Solvency II Calibration Paper, 2010.
- [7] Cipra, T.: Kapitálová přiměřenost ve financích a solventnost v pojišťovnictví, Ekopress, Praha, 2002.
- [8] Demografická ročenka České republiky 2011, Český statistický úřad, Praha, 2012.
- [9] EIOPA: EIOPA Report on the fifth Quantitative Impact Study (QIS5) for Solvency II, 2011.
- [10] EIOPA: Technical Specification for the Preparatory Phase (Part I), 2014, (též zdroj ikon k standardní formuli).
- [11] Embrechts, P.: Extreme Value Theory: Potential and Limitations as an Integrated Risk Management Tool, Derivatives Use, Trading & Regulation, č. 6, s. 449-456, 2000.

Literatura II

- [12] Evropská komise: Nařízení komise v přenesené pravomoci (EU) 2015/35 ze dne 10. října 2014, kterým se doplňuje směrnice Evropského parlamentu a Rady 2009/138/ES o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II).
- [13] Evropský parlament a Rada Evropské unie: Směrnice Evropského parlamentu a Rady 2002/13/ES ze dne 5. března 2002, kterou se mění směrnice Rady 73/239/EHS, pokud jde o požadavky na míru solventnosti u neživotních pojišťoven.
- [14] Evropský parlament a Rada Evropské unie: Směrnice Evropského parlamentu a Rady ze dne 25. listopadu 2009 o přístupu k pojišťovací a zajišťovací činnosti a jejím výkonu (Solventnost II) (Přepracované znění).
- [15] FSA: Calibration of the Enhanced Capital Requirement for with-profit life insurers, 2005.
- [16] Hardie, A. C., et al.: The solvency of life assurance companies, Transactions of the Faculty of Actuaries, č. 39, s. 251-340, C. & E. Layton, Londýn, 1984.
- [17] IAIS: Glossary, [online], [cit. 2015-04-03], dostupný z: <http://iaisweb.org>.
- [18] IAIS: On Solvency, Solvency Assessments and Actuarial Issues, 2000.
- [19] Kastelijn, W. M., Remmerswaal, J. C. M.: Solvency, Surveys of Actuarial Studies No. 3, Nationale-Nederlanden N. V., Rotterdam, 1986.
- [20] Lee, R. D., Carter, L. R.: Modeling and Forecasting U. S. Mortality, Journal of the American Statistical Association, č. 87 (419), s. 659-671, 1992.

Literatura III

- [21] Mori, B. de: Possibilité d'établir des bases techniques acceptables pour le calcul d'une marge minimum de solvabilité des entreprises d'assurances contre les dommages, The Astin Bulletin, č. 3 (3), s. 286–313, 1965.
- [22] OECD: Financial guarantees required from life assurance concerns, Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj, 1971.
- [23] OEEC: Minimum Standards of Solvency for Insurance Firms, Report on the ad hoc Working Party in Minimum Standards of Solvency, Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj, Paříž, 1961.
- [24] Ottův slovník naučný. Illustrovaná encyklopaedie obecných vědomostí, Praha, 1888-1909. Elektronická verze na CD-ROM, Zlín, 1997.
- [25] Sandström, A.: Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers: Theory and Practice, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2011.
- [26] Sandström, A.: Solvency: Models, Assessment and Regulation, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006
- [27] Swiss Reinsurance Company: Pandemic influenza: A 21st century model for mortality shocks, 2007.
- [28] Zákon č. 277/2009 Sb., o pojišťovnictví a o změně některých souvisejících zákonů (zákon o pojišťovnictví).