



cutting through complexity™

Riziko dlouhověkosti

Aktuárské služby

6. května 2011

Petra Černayová



Agenda

Petra Černayová

Advisor

KPMG Česká republika, s.r.o.

Tel: +420 222 124 231
pcernayova@kpmg.cz

*V tomto světě není **nic** jistého - kromě smrti a daní.*

Benjamin Franklin, 1789

1. Projekce úmrtnosti

- A. Lee Carter model
- B. Zahrnutí kohortního efektu
- C. Intervaly spolehlivosti

2. Hedging

- A. Přehled investičních nástrojů vázaných na úmrtnost
- B. q-forwardy

3. Příklad

- A. Dopad nesprávné volby úmrtnostních předpokladů při stanovení pojistného
- B. Aplikace hedgingu

Motivace

Riziko dlouhověkosti

- ▶ Systematické riziko
- ▶ Není možné eliminovat sdružováním velkého počtu rizik

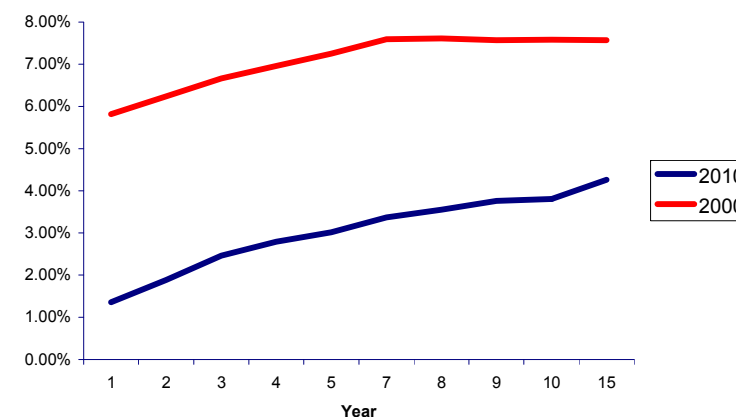
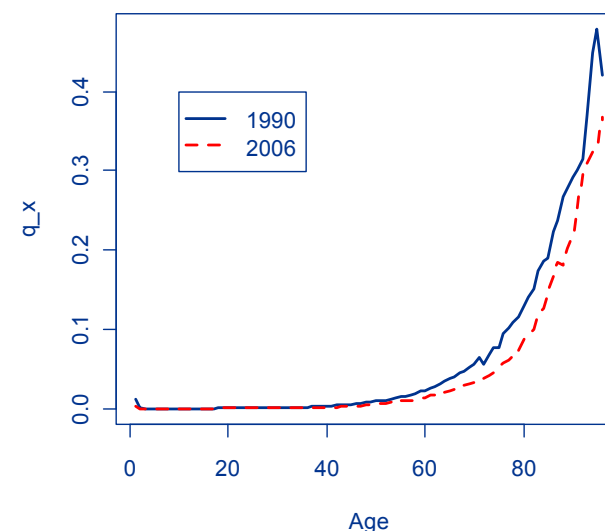
Problémem dlouhověkosti jsou postiženy zejména

- ▶ Důchodové pojišťovny
- ▶ Penzijní fondy

Co je důvodem pro obavy?

- ▶ Expozice – výše rezervy v penzijních fondech překročila 200 miliard korun
- ▶ Nejistota v trendu úmrtnosti (výrazný pokles míry úmrtnosti v posledních desetiletích, v průměru o 30 % od roku 1990)
- ▶ Pokles úrokových měr od roku 2000
- ▶ Dynamika chování pojistníků

Mortality rates in 1990 and 2006



Přístupy k modelování úmrtnosti

ČR

- ▶ Burcin, Kučera
- ▶ Generační úmrtnostní tabulky poskytnuté mateřskou společností adaptované na ČR
- ▶ Úmrtnostní tabulky od zajišťitele
- ▶ DAV 1997

Jiné přístupy

- ▶ Lee Carter model (1992)
- ▶ Renshaw and Haberman model (2006) – kohortní rozšíření Lee Carter modelu
- ▶ Debonneuil (2010) – kohortní rozšíření Lee Carter modelu
- ▶ P-spline model – Durban (2002)
- ▶ Cairns-Blake-Dowd modely (2006–2007)

1. Projekce úmrtnosti



$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}$$

Omezení: $\sum_t \kappa_t = 0 \quad \sum_x \beta_x = 1$

- ▶ α_x ... věkový profil úmrtnosti nezávislý na čase
- ▶ κ_t ... změna úrovně úmrtnosti v čase
- ▶ β_x ... vzor deviací od věkového profilu
- ▶ ε_{xt} ...chyba $\sim N(0, \sigma^2)$

Výpočet ve 2 krocích:

1. Odhad parametrů $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t$ na základě historických dat $\hat{m}_{xt} = \frac{d_{xt}}{E_{xt}}$
 d_{xt} ...počet úmrtí, E_{xt} ...expozice
2. Projekce $\hat{\kappa}_t$ ARIMA modelem

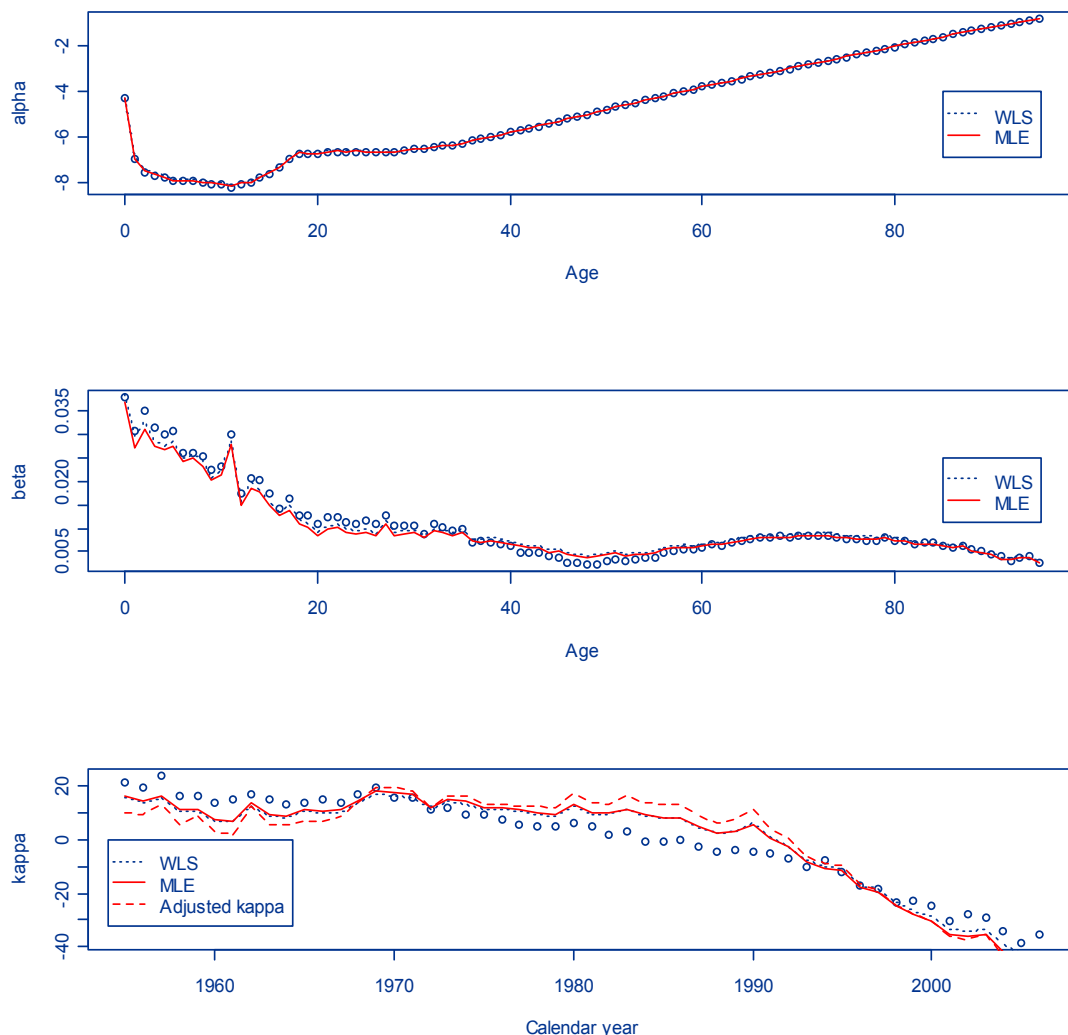
$$\hat{\mu}_{x,t+s} = \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_{t+s})$$

Metody odhadu

- ▶ Metoda nejmenších čtverců $\longrightarrow \min \sum_{x,t} (\ln(\hat{m}_{xt}) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$
- ▶ Metoda vážených nejmenších čtverců $\longrightarrow \min \sum_{x,t} w_{xt} (\ln(\hat{m}_{xt}) - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$
- ▶ Metoda maximální věrohodnosti – zavedení heteroskedasticity do modelu

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(\lambda_{xt})$$

$$\lambda_{xt} = E_{xt} \mu_{xt} = E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t) \longrightarrow \max \prod_{x,t} \frac{\lambda_{xt}^{d_{xt}}}{d_{xt}!} \exp(-\lambda_{xt})$$



Odhad parametru α

- ▶ Vyjadřuje obecný věkový profil úmrtnosti nezávislý na čase
- ▶ Vyznačuje se rostoucím trendem s výrazným nárůstem ve věku kolem 20 let u mužů

Odhad parametru β

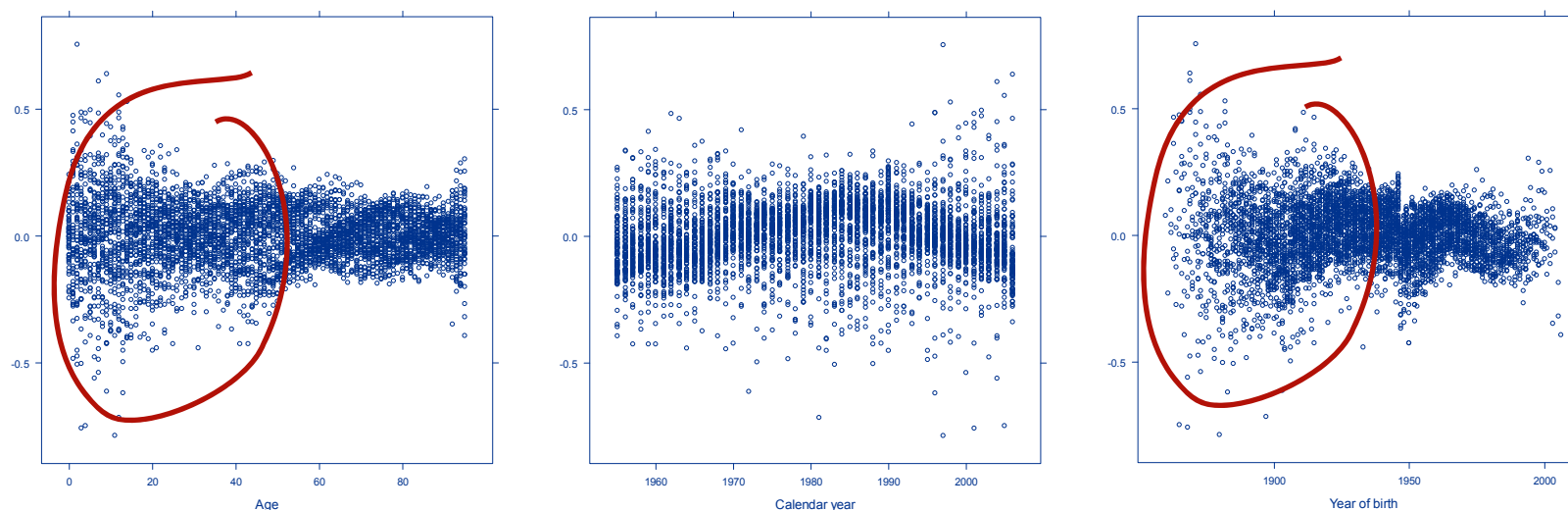
- ▶ Vyjadřuje rozdíly vlivu času na úmrtnost mezi věkovými skupinami
- ▶ Největší pokles úmrtnosti pro věkové skupiny do 20 let

Odhad parametru κ

- ▶ Výrazně klesající trend především od 90tých let

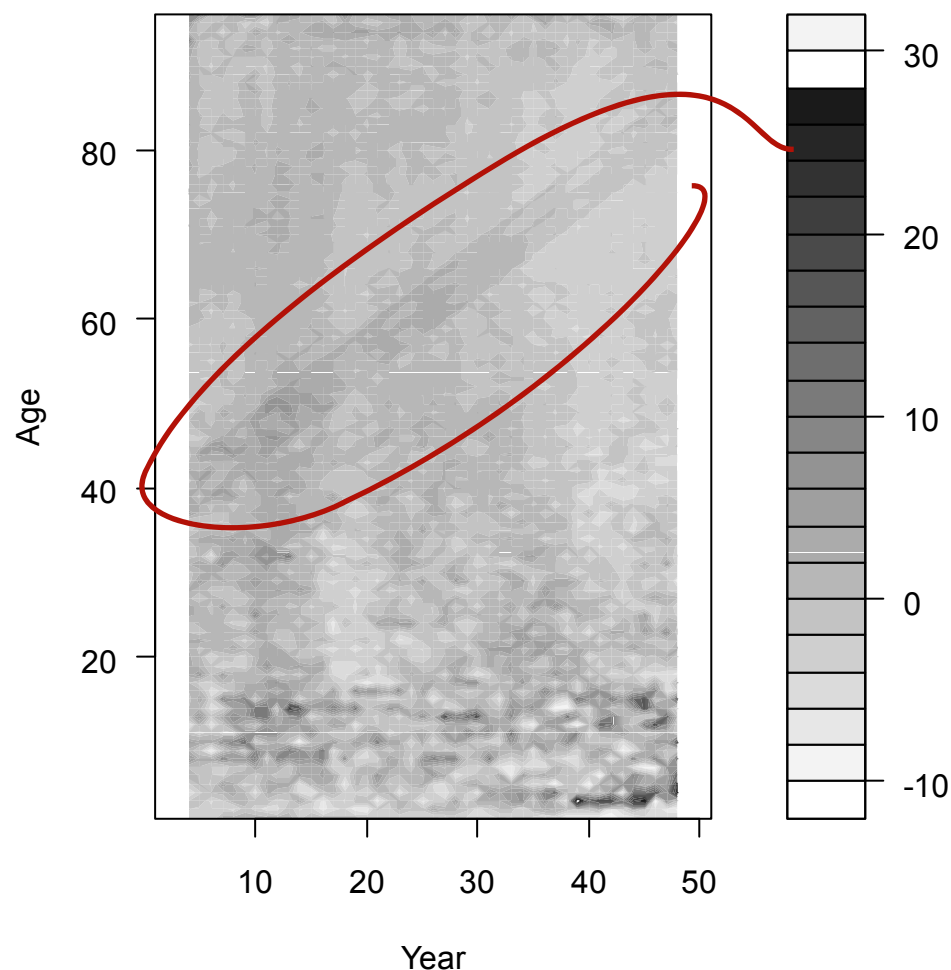
Grafická analýza reziduí

Při správné volbě modelu by měla být devianční rezidua nezávislá a s konstantním rozptylem



- ▶ Graf zobrazuje rezidua vůči věku, kalendářnímu roku a roku narození
- ▶ Rezidua při volbě Lee Carter modelu jeví známky trendu a nekonstantního rozptylu
- ▶ Vývoj úmrtnosti vykazuje charakteristiku, která není zachycena Lee Carter modelem

Mortality changes



Kohortní efekt

Závislost změny míry úmrtnosti na roce narození

- Rozpoznán díky výrazným diagonálám podobných barev v grafu (contour map) jednoletých poklesů úmrtnosti
- Není zachycen Lee Carter modelem
- V roce 2006 vzniklo rozšíření modelu o kohortní efekt – Renshaw and Haberman Age-period-cohort model

$$\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \beta_x^{(0)} l_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t)$$

Omezení: $\sum_x \beta_x^{(0)} = 1 \quad \sum_x \beta_x^{(1)} = 1 \quad \kappa_{t1} = 0$

- ▶ l_{t-x} ...zahrnutí kohortního efektu
- ▶ $\beta_x^{(0)}$...věkově specifický parametr

Výpočet ve 3 krocích:

1. Odhad parametrů $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x^{(0)}, \hat{\beta}_x^{(1)}, \hat{l}_{t-x}, \hat{\kappa}_t$ na základě historických dat
2. Projekce $\hat{\kappa}_t$ ARIMA modelem
3. Projekce $\hat{l}_{t-x}$ ARIMA modelem

Předpoklad nezávislosti časových řad

Vyjádření modelu v terminologii zobecněných nelineárních modelů

- Model s poissonovskou odezvou a logaritmickým linkem, tj.

$$Y_{xt} = D_{xt}$$

$$EY_{xt} = E_{xt} \mu_{xt} = E_{xt} \exp(\alpha_x + \beta_x^{(0)} l_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t)$$

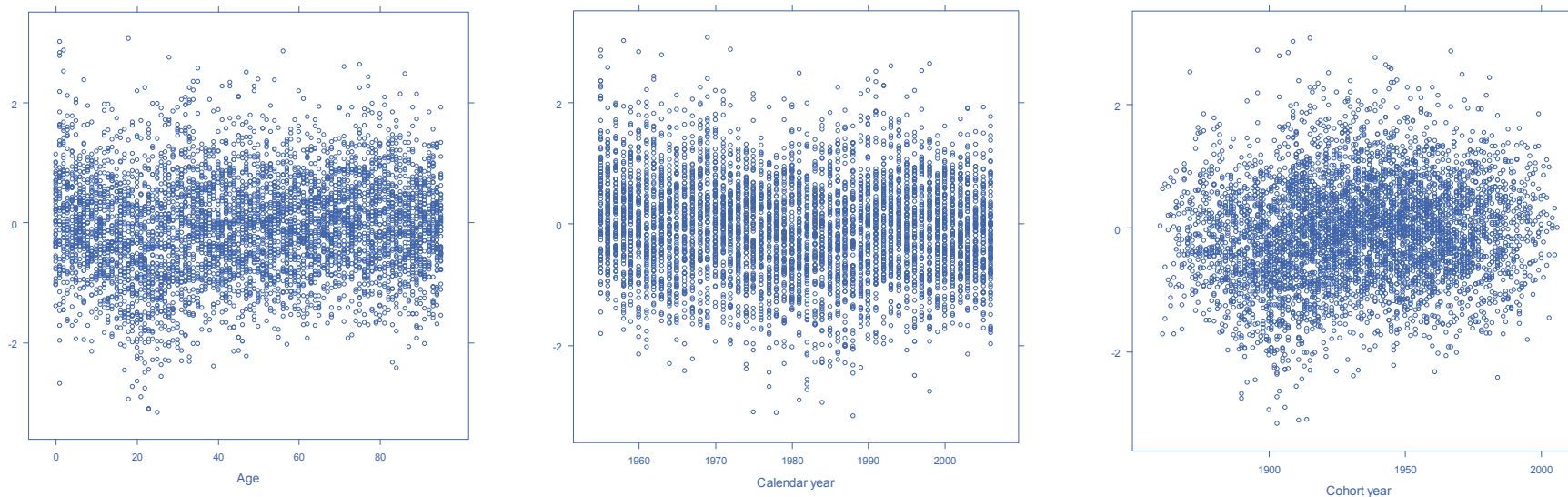
$$\eta_{xt} = \log(EY_{xt}) = \log(E_{xt}) + \alpha_x + \beta_x^{(0)} l_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t$$

- Odhad metodou maximální věrohodnosti se získá minimalizací deviance modelu

$$D(y_{xt}, \hat{y}_{xt}) = \sum_{xt} r_D^2 = \sum_{xt} 2\omega_{xt} \left\{ y_{xt} \log \frac{y_{xt}}{\hat{y}_{xt}} - (y_{xt} - \hat{y}_{xt}) \right\}$$

$$\text{kde } y_{xt} = d_{xt} \qquad \hat{y}_{xt} = E_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x^{(0)} \hat{l}_{t-x} + \hat{\beta}_x^{(1)} \hat{\kappa}_t)$$

Grafická analýza reziduí

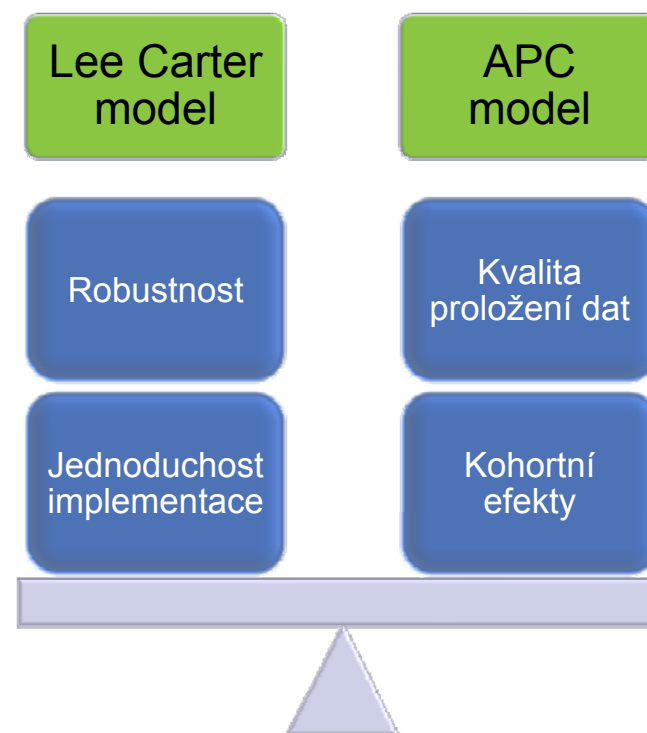


- ▶ Rezidua nenaznačují vůči věku, kalendářnímu roku a roku narození systematickou chybu modelu
- ▶ Analýza reziduí ukazuje na lepší fit APC modelu

Kriteria hodnocení modelu

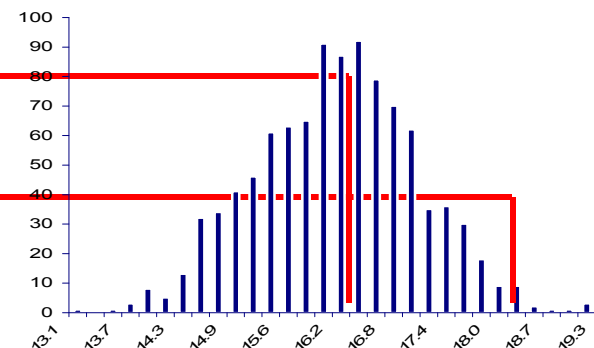
- ▶ **Kvalita proložení dat**
(kontrola reziduí)
 - ▶ **Jednoduchost implementace**
(rychlost konvergence iteračních metod)
 - ▶ **Transparentnost**
(schopnost interpretovat výsledky)
 - ▶ **Schopnost rozpoznat a zachytit v projekci kohortní efekt**
 - ▶ **Robustnost**
(vůči časovému období a věkovým skupinám)
-
- ▶ Kompromis mezi kvalitou proložení dat a robustností (Debonneuil 2010)

$$\mu_{x,t} = \exp(\alpha_x + \iota_{t-x} + \beta_x^{(1)} \kappa_t)$$



Nejlepší odhad očekávané doby života

95% interval spolehlivosti



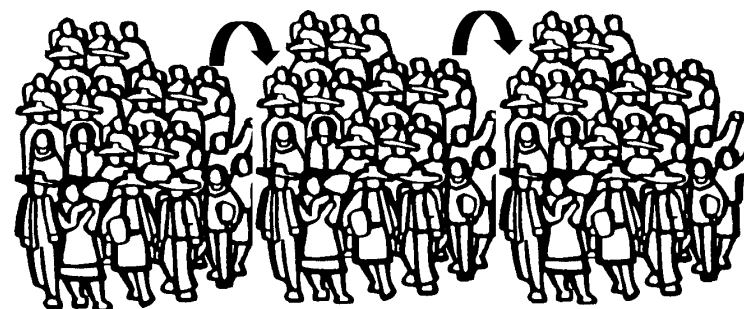
► Zdroje nejistoty

- nepřesnost v odhadech parametrů
- nejistota v ARIMA projekci

► Původní Lee Carter model zanedbává nejistotu v odhadu parametrů

► Bootstrap

- zohledňuje oba zdroje nejistoty
- možnost použití také pro APC model

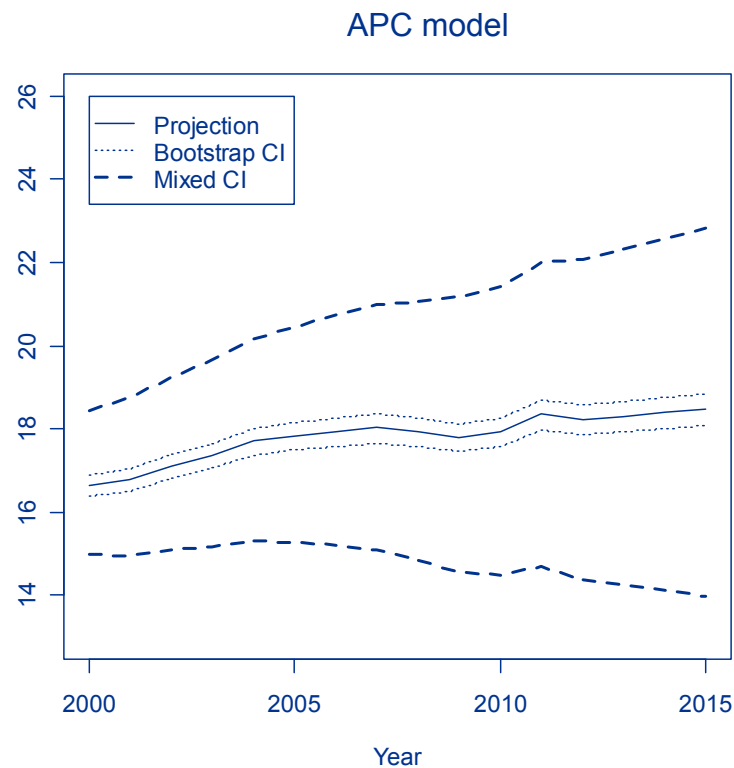
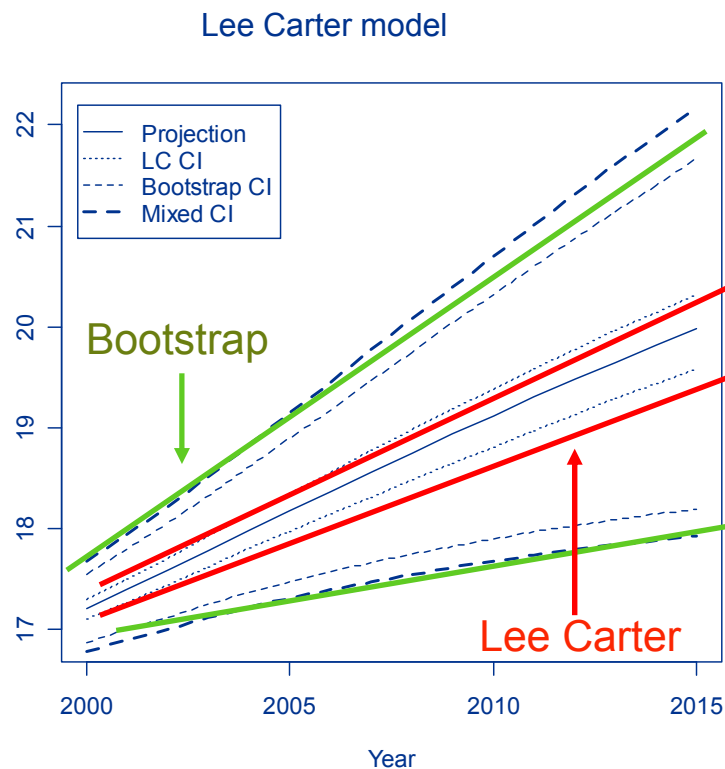


Postup reziduálního bootstrapu:

1. Odhad parametrů $\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x^{(0)}, \hat{\beta}_x^{(1)}, \hat{t}_{t-x}, \hat{\kappa}_t$ na základě historických dat a odhad matice reziduí r_D
2. Generování reziduí $\{r_D^{(n)}, n = 1, \dots, N\}$ náhodným výběrem s opakováním prvků matice r_D
3. Převod reziduí na pseudodata $\{\hat{D}_{xt}^{(n)}, n = 1, \dots, N\}$ iteračním řešením rovnice

$$2\hat{D}_{xt}^{(n)} - 2d_{xt} \ln(\hat{D}_{xt}^{(n)}) - ((r_D^{(n)})^2 + 2d_{xt} - 2d_{xt} \ln(d_{xt})) = 0$$

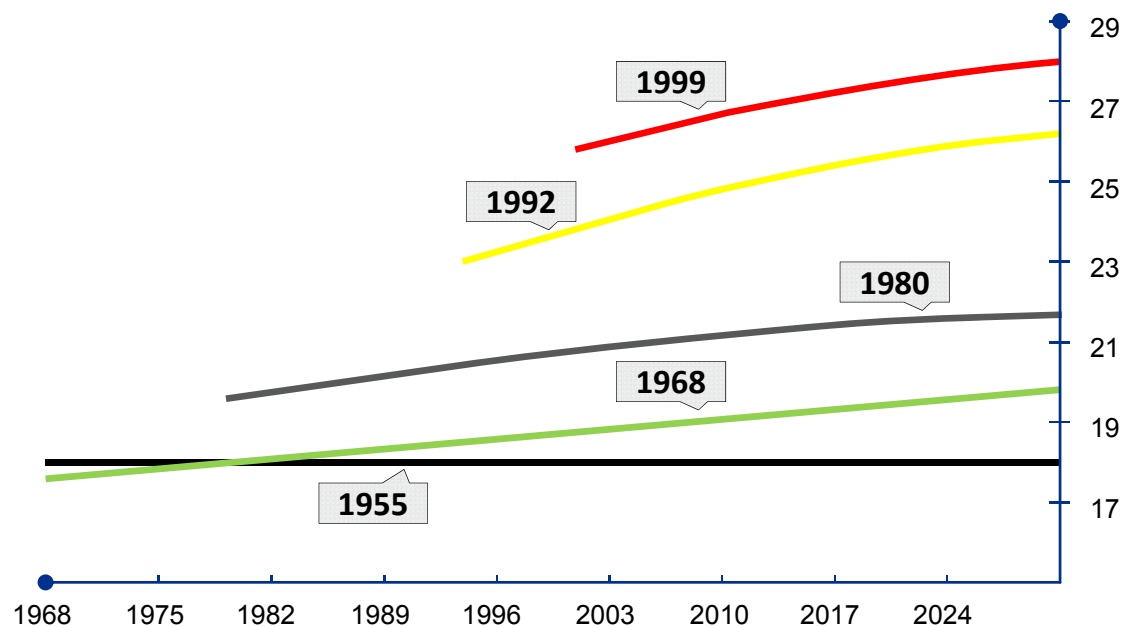
4. Odhad parametrů $\hat{\alpha}_x^{(n)}, \hat{\beta}_x^{(0)(n)}, \hat{\beta}_x^{(1)(n)}, \hat{t}_{t-x}^{(n)}, \hat{\kappa}_t^{(n)}$ ze pseudodat $\hat{D}_{xt}^{(n)}$
5. Projekce $\hat{t}_{t-x}^{(n)}, \hat{\kappa}_t^{(n)}$ modelem ARIMA
6. Konstrukce intervalu spolehlivosti percentilovým přístupem



- Intervaly spolehlivosti původního Lee Carter modelu jsou poměrně úzké v porovnání s bootstrapovými intervaly spolehlivosti

Je projektování úmrtnosti spolehlivé?

1. Projekce úmrtnosti



- ▶ Britští aktuáři pravidelně podhodnocovali zvyšování střední doby života. Graf zobrazuje následné předpovědi střední doby života muže ve věku 60 let publikované britskou aktuárskou společností (Actuarial Profession).
- ▶ Můžeme se tedy spolehnout na naše projekce?

Jaké mohou být následky nepřesností odhadů?

- ▶ V průměru každý dodatečný rok života zvýší hodnotu britských důchodových závazků o 3–4 % (Jardine Lloyd Thompson)
- ▶ Použití aktuálních odhadů úmrtnosti v projekcích budoucích důchodových závazků povede k navýšení důchodových závazků o 5–10 % (Watson Wyatt)
- ▶ Použití aktuálních odhadů úmrtnosti by zvýšilo náklady na poskytnutí penze muži narozenému v 1950 o 8 % (Mercer Human Resource)

2. Hedging





Negativní korelace mezi rizikovým a důchodovým pojištěním

Prodej důchodového portfolia externím fondům

- V roce 2007 uvažovalo 11 % DB penzijních plánů v UK o prodeji portfolia svých závazků v průběhu následujících pěti let
- Z tohoto důvodu vznikly desítky investičních společností specializujících se v této oblasti

Zajišťovny doted' neprojevily zájem o převzetí rizika dlouhověkosti. Rostoucí poptávka pojišťoven po transferu rizika bude mít pravděpodobně pozitivní dopad na apetit zajišťoven po riziku dlouhověkosti

Přehled cenných papírů navázaných na úmrtnost

Issuer	Cenný papír	Kryté riziko
Swiss Re (2003)	– Catastrophic mortality bond	– Katastrofická úmrtnost
European Investment Bank (2004)	– Longevity bond	– Dlouhověkost
J.P. Morgan (2007)	– q-forward	– Úmrtnost, dlouhověkost
LLMA (2010)	– q-forward, S-forward	– Úmrtnost, dlouhověkost
Tullet Prebon, Deutsche Borse (2010)	– Bezkupónový longevity swap	– Úmrtnost, dlouhověkost

- ▶ Rok 2010 zaznamenal zvýšenou činnost v oblasti dlouhověkosti
- ▶ Analýza Hymans Robertson označuje současné období jako „ticho před bouří“, v příštím období je očekávaný masivní transfer rizika

Nezisková organizace založená v únoru 2010, jejím cílem je rozvoj likvidního trhu s cennými papíry vázanými na úmrtnost.

Členové

Axa

Deutsche Bank

J.P.Morgan

Legal & General

Morgan Stanley

Pension Corporation

Prudential PLC

RBS

Swiss Re

UBS

Cíl

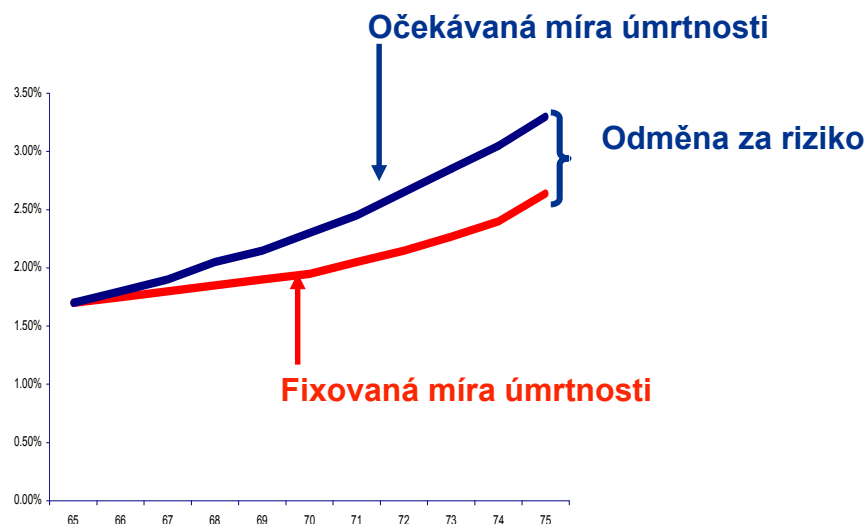
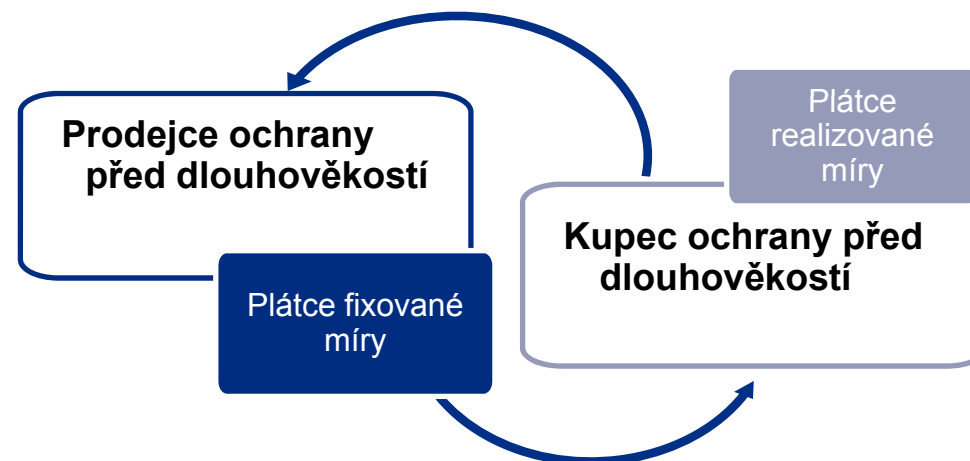
- ▶ Úmyslem NENÍ zdefinovat ceny, při kterých by transakce proběhly
- ▶ Cílem JE ulehčit porozumění povahy rizika dlouhověkosti a poskytnout benchmark, se kterým by mohla být cena transakce porovnána
- ▶ V současnosti zaměřená na britský trh, ale je v plánu rozšíření na jiné krajiny

Plánovaný výstup

- ▶ Výpočetní vzory pro standardizované longevity produkty
- ▶ Longevity index
- ▶ Standardizovaný oceňovací model pro dlouhověkost

Definice q-forwardu

- q-forward je bezkupónový swap, který mění **fixovanou míru úmrtnosti** za **realizovanou míru úmrtnosti** v předem dohodnutý den splatnosti



Jak určit fixovanou míru úmrtnosti?

- Fixovaná (forwardová) míra úmrtnosti je stanovena jako očekávaná míra úmrtnosti upravena o rizikovou prémii pro investora přebírajícího riziko dlouhověkosti

Jak transparentně určit realizovanou míru úmrtnosti?

- Index (LifeMetrics, Xpect index, LLMA index)

Likvidita vs. efektivita hedgingu

Likvidita	Efektivita
Realizovaná úmrtnost = index (např. LifeMetrics) spočtený na základě populační úmrtnosti (Velká Británie, USA, Nizozemí)	Úmrtnost realizovaná v portfoliu společnosti (například specifické populační charakteristiky, socio-ekonomické skupiny, regiony)
Očekávaná úmrtnost odhadnuta na základě široké populace	Očekávaná úmrtnost v portfoliu společnosti
Specifické doby splatnosti	Všechny doby splatnosti
Věkové skupiny (50–59, 60–69, 70–79, 80–89)	Všechny věky

- ▶ Nedostatek investorů do dlouhověkosti na trhu, potřeba zvýšit atraktivitu nabídkou lákavých výnosů
- ▶ Nejistota ohledně přístupu regulátora k cenným papírům sloužícím k hedgingu dlouhověkosti
- ▶ Kreditní riziko

3. Příklad



Uvažujeme smlouvu důchodového pojištění s následujícími parametry

- ▶ Pohlaví: muž
- ▶ Vstupní věk: 40
- ▶ Rok sjednání: 2006
- ▶ Placení pojistného: 20 let
- ▶ Roční důchodová splátka: 250 tisíc korun

Pricing
70% ÚT 2006

Realistická valuace
2010

Projektujeme současnou hodnotu závazku (v roce 2010)

A) S použitím pricingových předpokladů (úmrtnost na úrovni 70 % ÚT 2006, diskontování technickou úrokovou mírou, náklady na úrovni uvažovaných v pricingu) = výška statutární životní rezervy

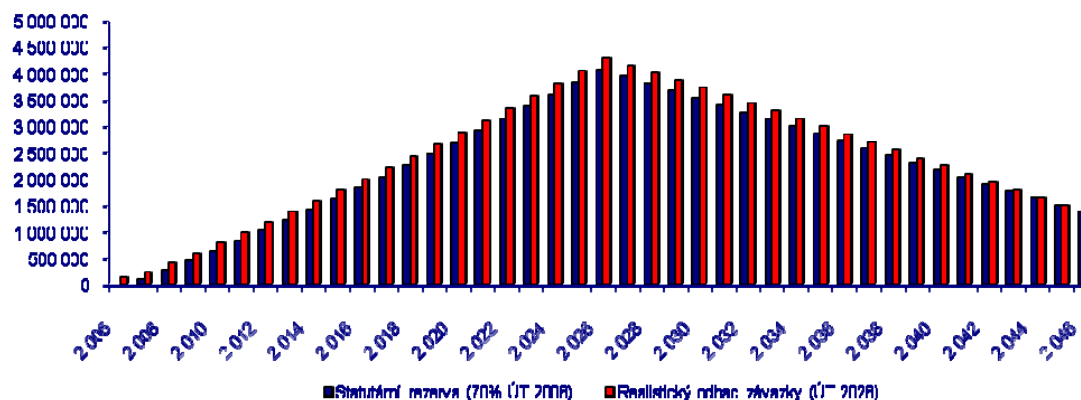
B) S předpokládanou úmrtností na úrovni projektované kohortní úmrtnostní tabulky, ostatní předpoklady zůstávají nezměněné (náklady na úrovni pricingu a diskontování použitím TÚM)

V obou případech předpokládáme 100% anuizaci

Testujeme tedy separovaný vliv změny úmrtnostních předpokladů

- Výška statutární rezervy se jeví jako nedostatečná v porovnání s projektovanou hodnotou závazku

Statutární rezerva vs. Realistický odhad závazku (100% anulace)



- Zohlednění chování pojistníků – míry anulace

Potřeba navýšení statutární rezervy	
% anulace	Navýšení v korunách
5%	25 434
50%	220 881
100%	438 044

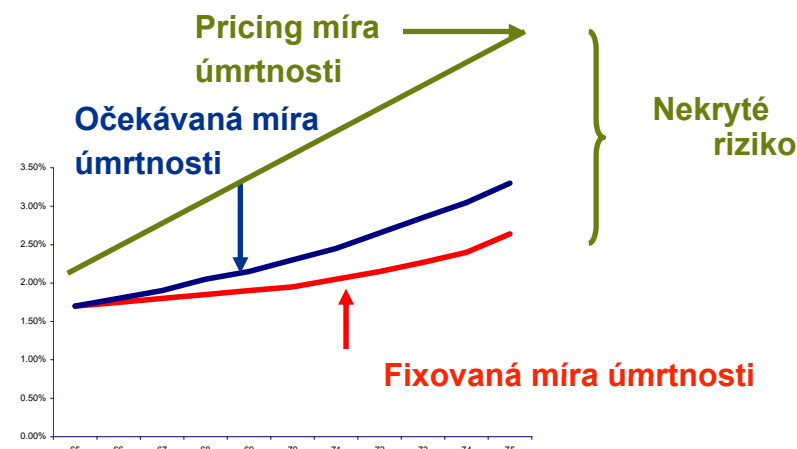
- V současnosti míra anulace pod 5 %
- Je ale správné spoléhat se na zachování této hodnoty?
- Potřeba zachytit dynamiku v chování pojistníků
- Nutnost počítat s možností legislativních změn

In-force portfolio smluv s nedostatečným pricingem úmrtnosti

- ▶ Výrazně odlišný předpokládaný vývoj úmrtnosti v pricingu v porovnání se současnými odhady úmrtnosti (podcenění dlouhověkosti)
- ▶ Rozdíl mezi nadhodnocenou mírou úmrtnosti v pricingu a současným odhadem úmrtnosti investorů není krytý



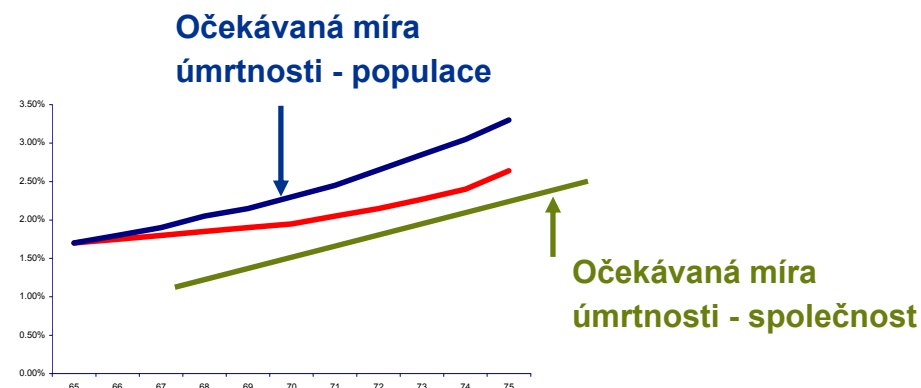
- ▶ q-forwardy nejsou vhodný nástroj na řešení nedostatků v minulém pricingu



Nový obchod – možné strategie

- ▶ A) Vývoj míry úmrtnosti pojišťovny je odlišný od předpokladu investora
 - ▶ Například pojistný kmen s převládající socio-ekonomickou skupinou nebo regionem
 - ▶ Hedging systematického rizika q-forwardami může postrádat efektivitu

- ▶ B) Očekávaná míra úmrtnosti pojišťovny je paralelní s očekáváním investora, tj. předpokládá se stejný vývoj v čase
 - ▶ Pojistné stanovené na základe očekávané míry úmrtnosti v portfoliu
 - ▶ Systematické riziko úmrtnosti kryté pomocí hedgingu skupinou q-forwardů
 - ▶ Jak je stanovená riziková prémie?



Způsoby výpočtu rizikové prémie

► Sharpeov poměr (J.P.Morgan)

Očekávaný anualizovaný výnos/Anualizované riziko $\geq$ Sharpe ratio

$$q_{\text{fix}} = (1 - \text{počet let} \times \text{Sharpe} \times q_{\text{volatilita}}) \times q_{\text{očekávaná}}$$

Sharpe = 0.25

Volatilita = 5%

Počet let = 20

$$q_{\text{fix}} = 0.75 \times q_{\text{očekávaná}}$$

► Úprava předpokládané míry poklesu úmrtnosti (www.llma.org)

$$q_{\text{očekávaná}} = q_{\text{současná}} \times (1 - \text{očekávaný pokles úmrtnosti})^{\text{počet let}}$$

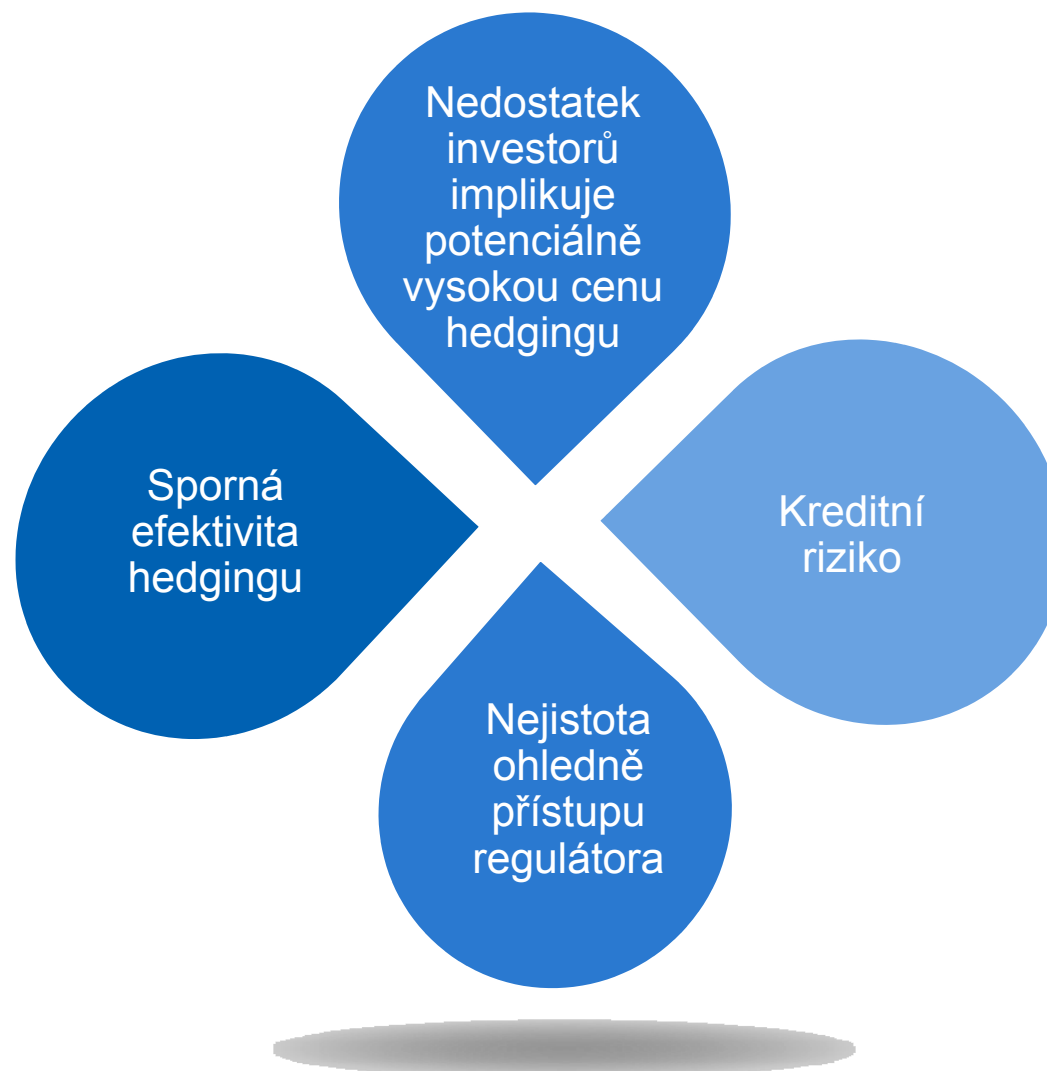
$$q_{\text{fix}} = q_{\text{současná}} \times (1 - \text{očekávaný pokles úmrtnosti} - \text{riziková přírážka})^{\text{počet let}}$$

Očekávaný pokles = 2%

Riziková přírážka = 1%

Počet let = 20

$$q_{\text{fix}} = 0.81 \times q_{\text{očekávaná}}$$





cutting through complexity™

Děkuji za pozornost!

Petra Černayová

Advisor

KPMG Actuary Services



© 2011 KPMG Česká republika, s.r.o., a Czech limited liability company and a member firm of the KPMG network of independent member firms affiliated with KPMG International Cooperative ("KPMG International"), a Swiss entity. All rights reserved. Printed in the Czech Republic.

The KPMG name, logo and 'cutting through complexity' are registered trademarks or trademarks of KPMG International Cooperative (KPMG International)