



KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

25.11.2016 SAV
Iveta Grzonková

1.	Obsah	P.02
2.	Typy zajištění a hlavní charakteristiky	P.03
	Proporcionální zajištění	P.04
	Neporcionální zajištění	P.06
3.	Účetní metody a časové rozlišení	P.08
4.	Kombinování zajišťovacích smluv	P.11
	Proporcionální	P.12
	Neporcionální	P.14
	Proporcionální a neporcionální	P.16
5.	Příklady kombinace smluv	P.17
6.	Optimalizace zajištění	P.23
7.	Literatura	P.33

TYPY ZAJIŠTENÍ A HLAVNÍ CHARAKTERISTIKY

TYPY ZAJIŠTĚNÍ

➔ Fakultativní zajištění

(Facultative reinsurance)

- ➔ Proporcionální
- ➔ Neproporcionální

Hlavní charakteristiky

- *volitelné*
- *poskytováno na bázi jednotlivých rizik*
- *detaily rizika jsou známy zajistiteli*
- *vysoké administrativní náklady*
- *podmínky jsou určovány podle rizika*
- *delší čas do realizace zajištění*
- *žádná garance, že bude zajištění poskytnuto*

➔ Obligatorní zajištění

(Treaty reinsurance)

- ➔ Proporcionální
- ➔ Neproporcionální

Hlavní charakteristiky

- *povinné*
- *poskytováno pro celé portfolio*
- *zajistitel má informace o portfoliu*
- *menší administrativní náklady*
- *podmínky jsou dané předem*
- *okamžité krytí rizika*
- *automatická kapacita*

TYPY ZAJIŠTENÍ A HLAVNÍ CHARAKTERISTIKY

PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

→ Charakteristiky

- Vlastní vrub (Retention): u pojistitele zůstává část rizika, pojistného a škod
- Cedovaná část (Cession): k zajistiteli odchází část rizika, pojistného a škod

→ Kvótové zajištění - Quota Share (QS)

- Proporcionální rozdělení v každé rizikové skupině až do limitu smlouvy
- Podíl vlastního vrubu a cedované části je vyjádřen v procentech, tento podíl je předem daný – univerzální pro všechny smlouvy v portfoliu, snadná administrativa
- Umožňuje navýšit upisovací kapacitu pojišťovny, může umožnit snížení nákladů – závisí na provizi od zajistitele, ale snižuje také objem pojistného

	Vlastní vrub	Zajištěná část
Pojistné	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot P_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) \cdot P_i$
Expozice - riziko	$\sum_{i=1}^n a_i \cdot K_i$	$\sum_{i=1}^n (1 - a_i) \cdot K_i$
Škody	$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{n_i} a_i \cdot S_{i,j} \right] = \sum_{i=1}^n a_i \cdot S_i$	$\sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^{n_i} (1 - a_i) \cdot S_{i,j} \right] = \sum_{i=1}^n (1 - a_i) \cdot S_i$

- Pro Quota Share je $a_i = a$ pro všechny i

TYPY ZAJIŠTENÍ A HLAVNÍ CHARAKTERISTIKY

PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ Excedentní zajištění - Surplus (SPL)

- ➔ Vlastní vrub je fixní částka, procento se liší podle výše pojistné částky
- ➔ Proporcionální rozdělení pouze u rizik převyšujících vlastní vrub až do limitu smlouvy, vlastní vrub vyjádřen částkou, cedovaná část je násobek vlastního vrubu (=line)
- ➔ Proporce vlastního vrubu a cedované částky se liší riziko od rizika, uplatňuje se na všechny pojistné smlouvy (které přesahují vlastní vrub), tato proporce se uplatňuje stejně u pojistného i u škod
- ➔ Umožňuje navýšit upisovací kapacitu pojišťovny, tvoří homogenní rizika, může umožnit snížení nákladů – závisí na provizi od zajišťovny
- ➔ Můžeme použít nezápornou funkci reálných hodnot

$K : i \rightarrow K(i) = K_i \geq 0$ k proporcionalnímu rozložení expozice / rizika,

$$1 - a_i = \frac{(K_i - \text{line})_+}{K_i} = \begin{cases} 0 & \text{line} \geq K_i \\ \frac{(K_i - \text{line})}{K_i} & \text{line} < K_i \end{cases}$$

kde „line” je vlastní vrub rizika.

TYPY ZAJIŠTENÍ A HLAVNÍ CHARAKTERISTIKY

NEPROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

→ **Charakteristiky**

- Neproporcionální rozdělení rizika, pojistného a škod
- Zaměřuje se na škody, ne na pojistné částky, škody jsou kryty do sjednané výše (priority), zbytek krytý není (případně jinou smlouvou)
- Pojistitel platí škodu do výše vlastního vrubu, zajistitel platí vše od vlastního vrubu do sjednaného limitu
- Zajistné je vypočteno bez ohledu na pojistné na pojistných smlouvách
- S je škoda, Vlastní vrub = $\text{MIN}(S, \text{priority})$
- Cedovaná část $C = \text{MAX}(S - \text{priority}, 0)$

→ **Zajištění škodního nadměrku (XL = Excess of Loss)**

- Na riziko (XL per Risk): $C = (S_{i,j} - \text{priority})_+$
- Na škodní událost (XL per Event): $C = (S_g - \text{priority})_+$, kde je

$$S_g = \sum_{(i,j) \in g} S_{i,j} \quad \text{a škoda } j \text{ na riziku } i \text{ vznikla v důsledku události } g.$$

- **Kombinace obou těchto typů (combined XL per Risk / per Event)**
- Zajistitel kryje část škody přesahující vlastní vrub do limitu smlouvy
- Je zde nižší zajistné, je to snadný způsob jak omezit výši škody, nemusí být k dispozici pro speciální krytí

➔ Zajištění časového nadměrku škod (Stop Loss)

➔ Zajistitel kryje část celkových škod přesahující vlastní vrub až do limitu smlouvy

- Podle příčiny škody nebo škody za určité časové období

$$S = \left[\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} S_{i,j} \right) - \text{priority} \right]_+$$

➔ Velmi obsáhlé krytí rizik

➔ Funguje, i když není možné škodní událost přesně specifikovat

➔ Je ochranou proti nečekaným kumulacím škod

➔ Ale nemůže zajistit zisk, Stop Loss s nízkým vlastním vrubem je velmi drahé zajištění → nakonec je neekonomický

➔ Zajistitelé potřebují velké množství dat o portfoliu, jinak portfolio nezajistí

→ Proporcionální zajištění I

→ Underwriting year / Upisovací roky

- *Zajistitel je zodpovědný za škody, které vznikly na pojistných smlouvách, které byly upsány během platnosti pojistné smlouvy*
- *Odpovědnost zajistitele vyprší s koncem platnosti pojistné smlouvy*
→ *účty je nutné připravovat tak dlouho, jak dlouho platí pojistné smlouvy*
- *V každém čtvrtletí mohou být škody a pojistné z několika upisovacích let – je nutné alokovat pojistné a škody vždy do správného upisovacího roku*

→ Occurrence year / Rok vzniku

- *Zajistitel je zodpovědný za škody, které vznikly během platnosti pojistné smlouvy*
- *Délka platnosti pojistné smlouvy nemá vliv na odpovědnost zajistitele*
- *Na konci pojistného roku se přesouvá nezasloužené pojistné na dalšího zajistitele, ale nevypořádané škody nadále zůstávají odpovědností původního zajistitele*
- *Zajistitel se podílí na vývoji škod dokud nejsou uzavřeny*

→ Proporcionální zajištění II

→ Calendar year (Clean-Cut) / Kalendářní rok (čistý řez)

- *Zajišťitel je zodpovědný za škody, které vznikly během kalendářního roku a vývoj škod z minulých let, který nastal v aktuálním zajištném období*
- *Délka platnosti pojistné smlouvy nemá vliv na odpovědnost zajišťitele*
- *Na konci zajištného roku se přesouvá nezasloužené pojistné a neuzavřené škody na dalšího zajišťitele*
- *Účty jsou uzavřeny na konci platnosti smlouvy s portfoliem vstupním a výstupním (portfolio withdrawal a portfolio entry)*

Proporciální zajištění	Upisovací rok	Rok vzniku	Kalendářní rok (Clean-Cut / čistý řez)
Alokace pojistného	Předepsané pojistné	Zasloužené pojistné	Zasloužené pojistné
Účtování škod	Vývoj po skončení smlouvy	Vývoj po skončení smlouvy	Čistý řez, portfolio škod vstupní a výstupní

→ **Neproporcionální zajištění**

→ **Spouštěče (Insurance triggers)**

- Určují událost, která musí nastat, aby došlo k odškodnění z původní pojistné smlouvy
- Běžné spouštěče:
 - *Acts committed* – spáchání činu (pochybění pojištěného)
 - *Occurrence* – opravdový výskyt zranění nebo poškození
 - *Claims made* – datum uplatnění škody vůči pojištěnému
- Vždy záleží na zvoleném spouštěči do jakého období spadá pojistná událost

→ **Alokace škod**

→ **Losses occurring on risk attaching (LORA)**

- Rozhodující je datum, kdy vzniklo riziko, původní spouštěč je irelevantní

→ **Losses occurring during (LOD)**

- Rozhodující je datum kdy vznikla škoda, datum kdy vzniklo riziko není relevantní, stejně jako spouštěč

→ **Claims made during**

- Rozhodující je datum kdy byla škoda nahlášena, datum kdy vzniklo riziko a škoda nejsou relevantní, stejně jako spouštěč

➔ Proč kombinovat zajištné smlouvy?

- ➔ Je možné využít výhody jednotlivých typů zajištění
- ➔ Lépe se zohledňují specifické potřeby daného portfolia
- ➔ Optimální kombinace zajištných smluv závisí na cílech dané společnosti s ohledem na strategii risk managementu
- ➔ Všechny kombinace jsou možné, ale nejčastěji platí toto:
 - *Proporcionální zajištění (hlavně Surplus) se uplatňuje před neproporcionálním zajištěním*
 - *Zajištění XL per Risk (škodního nadměrku pro riziko) před XL per Event (škodního nadměrku pro událost)*
 - *Stop Loss (časový nadměrek škod) je uplatňován až nakonec*
 - *Ale Quota Share může být uplatněna v libovolném pořadí*

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

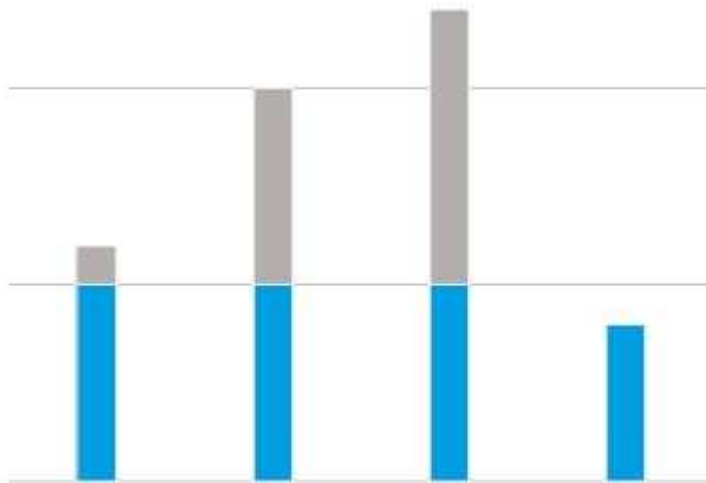
→ Hlavní výhody

- Homogenizace portfolia (Surplus)
- Umožňuje navýšit upisovací kapacitu pojišťovny a zároveň vyhladí portfolio (QS)
- Umožňuje vyšší vlastní vrub

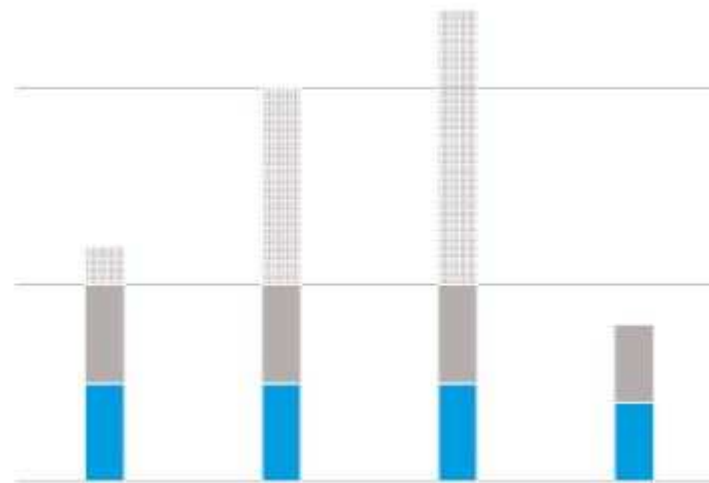
→ Příklad

- Quota share 50%, Surplus 5 M vlastní vrub, 2 x vlastní vrub = kapacita smlouvy
- 1. Surplus před Quota Share

Surplus na portfolio



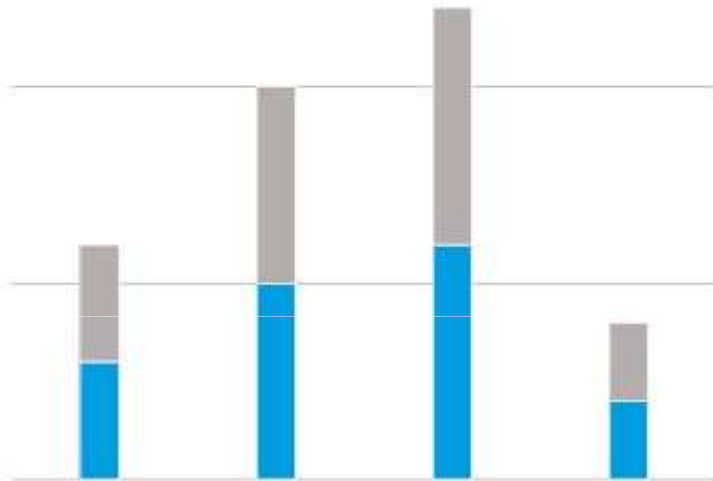
QS po Surplus na portfolio



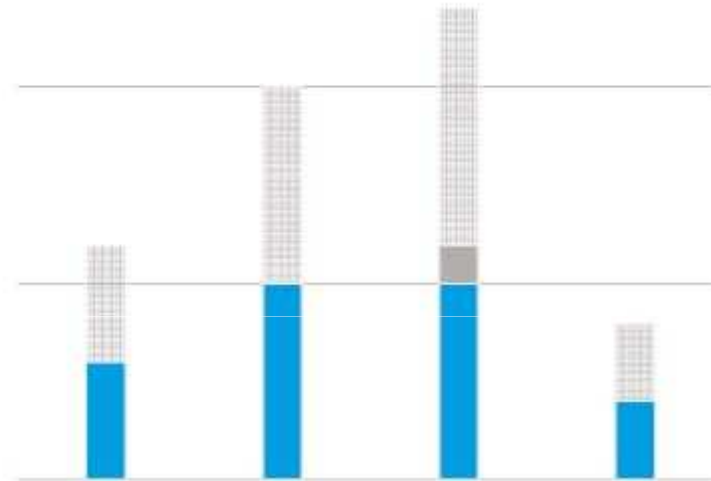
KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

→ 2. Surplus po Quota Share
QS na portfolio



Surplus po QS na portfolio



- Výsledek je, že v našem případě je mnohem výhodnější mít nejdříve Surplus a teprve potom Quota Share → dostaneme tím homogenní portfolio
- V případě, že máme nejdříve QS a teprve potom Surplus, tak do Surplusu jde minimum rizik

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ Zajistné vrstvy

- ➔ Zajistění dostatečné kapacity, každá vrstva může mít jiné podmínky – jiný počet Reinstatementů (znovu naplnění kapacity vrstvy za další zajistné), jiné podmínky (clauses), může obsahovat různé dodatečné podmínky
- ➔ Úkolem je optimální zajistné a splnění potřeb pojišťovny

➔ Neproporcionální zajistné smlouvy

- ➔ XL per Risk a XL per Event je nejčastější kombinací neproporcionálních zajistných programů
- ➔ Cílem je zajistit ochranu proti
 - *Velkým jednotlivých škodám (single losses)*
 - *Katastrofám (živlům) které mají dopad na několik rizik nebo druhů pojištění*

➔ **Zajištění XL per Risk se uplatňuje vždy před (katastrofickým) XL per Event:**

- ➔ Každá škoda na riziku v katastrofické události bude nejdříve individuálně kryta z XL per Risk a vlastní vruby (případně celé škody, pokud nedosáhnou do per Risk) budou celkově vstupovat do XL per Event zajištění

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ Příklad: XL per Risk a XL per Event

- ➔ XL per Risk: 4 M xs 1 M, 2 Reinstatementy
- ➔ XL per Event: 9 M xs 1 M, 1 Reinstatement
- ➔ V našem příkladu per Risk má limit na živel ve výši 1 vrstvy, tedy nesmí přesáhnout 4 M

- ➔ Event limit znamená: Škody z rizika živlu (Natural Perils) mohou být uplatněny z XL per Risk z jednotlivých rizik, během 1 roku jsou uplatněny maximálně do limitu 1 vrstvy (nesmí přesáhnout 4 M v našem příkladě)

Riziko	Výše škody	Uplatnění vlastního vrubu	Uplatněno z per Risk
1	4 M	1 M	3 M
2	3 M	1 M	2 M
3	2 M	1 M	1 M
4	1 M	1 M	0 M
Celkem	10 M	4 M	6 M
Škody uplatněné z per Risk - Event limit			4M

Škody jdoucí do Cat XL	6 M
Vlastní vrub Cat XL	1 M
Škody uplatněné z Cat XL	5 M

Vlastní vrub po per Risk i Cat XL	1 M
--	------------

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ A PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

- ➔ **Kombinace Excess of loss a Stop loss**
- ➔ Cílem je:
 - ➔ Krytí velkých jednorázových škod pomocí Excess of loss (XL) zajištění
 - ➔ Stop loss (SL) poskytuje ochranu proti abnormálnímu navýšení ve škodní frekvenci
- ➔ ***Zajištění Stop Loss (časový nadměrek škod) se uplatňuje až po XL zajištění***

- ➔ **Kombinace neproporcionálního a proporcionálního zajištění**
- ➔ Cílem je:
 - ➔ Nechat si více pojistného zvolením vyššího poměru u proporcionálního zajištění
 - ➔ Krytí velkých jednorázových škod pomocí Excess of loss (XL) zajištění
- ➔ ***proporcionální zajištění Surplus by mělo být první mezi všemi uplatněnými zajištěními nebo alespoň před neproporcionálním zajištěním***
- ➔ ***proporcionální zajištění Quota Share je možné uplatnit v jakémkoliv pořadí a je možné ho uplatnit několikrát***

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ A PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ Příklad – kombinace několika druhů zajistných smluv:

- ➔ Surplus 2 vrstvy po 5 M, vlastní vrub 5 M
- ➔ Quota share 50% pro vlastní vrub po Surplusu do 5 M
- ➔ XL per Risk 1.vrstva 0,5 M xs 0,5 M, ROL 20%
- ➔ XL per Risk 2. vrstva 1,5 M xs 1 M, ROL 10%
- ➔ CAT XL (per Event): 4 M xs 1 M, ROL 7,5%
- ➔ Všechny XL vrstvy mají 1 Reinstatement za 100% pojistného

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ A PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

- ➔ *Všechny škody jsou způsobené tou samou příčinou (například vichřice)*
- ➔ *Vyplňte tabulku níže:*

	Pojistné částky	Škoda před zajištěním	Část rizika náležející zajistiteli pro Surplus	Část škody náležející zajistiteli pro Surplus	Hrubá škoda po uplatnění Surplusu	Škoda do Quota share zajištěné smlouvy	Škoda po QS před XL zajištěním	1. vrstva XL, 0,5m xs 0,5m, 1 reinstat.	2. vrstva XL, 1,5m xs 1m, 1 reinstat.	Škoda po XL před CAT XL zajištěním	CAT XL 4m xs 1m, 1 reinstat.	Čistá škoda pro pojistele
1	10,00	1,00										
2	5,00	5,00										
3	15,00	0,00										
4	15,00	0,50										
5	7,50	1,80										
6	12,50	0,20										
7	5,00	0,00										
8	2,50	2,50										
		11		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		

- ➔ *Další otázky:*
- ➔ *Kolik je pojistné za reinstatementy*
 - ➔ XL per Risk 1.vrstva, XL per Risk 2. vrstva
 - ➔ XL per Event

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ A PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ Řešení příkladu:

- ➔ Surplus 2 vrstvy po 5 M, vlastní vrub 5 M
- ➔ Quota share 50% pro vlastní vrub po Surplusu do 5 M

	Pojistné částky	Škoda před zajištěním	Část rizika náležející zajistiteli pro Surplus	Část škody náležející zajistiteli pro Surplus	Hrubá škoda po uplatnění Surplusu	Škoda do Quota share zajištné smlouvy	Škoda po QS před XL zajištěním
1	10,00	1,00	50,0%	0,50	0,50	0,25	0,25
2	5,00	5,00	0,0%	0,00	5,00	2,50	2,50
3	15,00	0,00	66,7%	0,00	0,00	0,00	0,00
4	15,00	0,50	66,7%	0,33	0,17	0,08	0,08
5	7,50	1,80	33,3%	0,60	1,20	0,60	0,60
6	12,50	0,20	60,0%	0,12	0,08	0,04	0,04
7	5,00	0,00	0,0%	0,00	0,00	0,00	0,00
8	2,50	2,50	0,0%	0,00	2,50	1,25	1,25
		11		1,55	9,45	4,72	4,72

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ A PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ Řešení příkladu:

- ➔ XL per Risk 1.vrstva 0,5 M xs 0,5 M, ROL 20%
- ➔ XL per Risk 2. vrstva 1,5 M xs 1 M, ROL 10%
- ➔ CAT XL (per Event): 4 M xs 1 M, ROL 7,5%
- ➔ Všechny XL vrstvy mají 1 reinstatement za 100% pojistného

	Škoda po QS před XL zajištěním	1. vrstva XL, 0,5m xs 0,5m, 1 reinstat.	2. vrstva XL, 1,5m xs 1m, 1 reinstat.	Škoda po XL před CAT XL zajištěním	CAT XL 4m xs 1m, 1 reinstat.	Čistá škoda pro pojistele
1	0,25	0,00	0,00	0,25	0,97	1,00
2	2,50	0,50	1,50	0,50		
3	0,00	0,00	0,00	0,00		
4	0,08	0,00	0,00	0,08		
5	0,60	0,10	0,00	0,50		
6	0,04	0,00	0,00	0,04		
7	0,00	0,00	0,00	0,00		
8	1,25	0,40	0,25	0,60		
	4,72	1,00	1,75	1,97		

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

NEPROPORCIONÁLNÍ A PROPORCIONÁLNÍ ZAJIŠTĚNÍ

➔ *Další otázky řešení - Kolik je pojistné za reinstatementy?*

➔ XL per Risk 1.vrstva – 100 000 Kč

- *(20% ROL = 0,2 * 0,5 M = 0,1 M)*

➔ XL per Risk 2. vrstva – 150 000 Kč

- *(10% ROL = 0,1 * 1,5 M = 0,15 M)*

➔ XL per Event – 72 990 Kč

- *973.333 z 4.000.000 využito, tedy 24,33% z původního pojistného*

- *tedy 24,33% ze 7,5 % ROL ze 4 M (zaokrouhleno)*

➔ Přestávka

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Úvod

- ➔ Existuje několik typů optimalizačních kritérií:
- ➔ Nejznámější je "**Mean – Variance criterion**", kde se maximalizuje očekávaný zisk za podmínky fixního rozptylu, nebo ekvivalentně minimalizace rozptylu za podmínky fixního zisku
- ➔ Jinou populární metodou je teorie ruinování - "Probability of ruin criterion", kde se maximalizuje zisk za podmínky pravděpodobnosti ruinování pod danou hodnotou, nebo obdobně minimalizace pravděpodobnosti ruinování pod podmínkou daného zisku (minimální zisk je daný).
- ➔ Zde se zaměříme na **mean-variance optimalizační kritérium**. Ale mírně si ho upravíme, aby bylo použitelnější a obecnější.
- ➔ Optimalizace zajištění je připravena na základě článku [1].

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Úvod

- ➔ **Mean-variance optimalizační kritérium:**
Budeme maximalizovat očekávaný zisk při zachování fixní směrodatné odchylky drženého rizika.
- ➔ Náklad na držené riziko bude definován takto: **Celkový zajistný náklad (Loading) = dodatečná částka, která bude zaplácena nad očekávané cedované riziko zajistiteli plus fixní násobek směrodatné odchylky drženého rizika.**
- ➔ Předpokládáme, že **Loading je přímo úměrný očekávanému riziku cedovanému zajistiteli**, což odpovídá očekávané hodnotě kalkulovaného zajistného. Bude se lišit podle typu zajistné ochrany a bude záviset na pořadí zajistného krytí.
- ➔ **Násobek směrodatné odchylky drženého rizika** je interpretován jako náklad na krytí rizika při alokaci kapitálu. Předpokládáme, že držený kapitál je úměrný směrodatné odchylce.

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Popis

- ➔ **Formální popis kritéria a struktury Loadingu:**
- ➔ Přijaté pojistné Cedenta = pojišťovny (Premium Income Cedenta) = PI , je to po fakultativním zajištění, není zde uvedena přímá souvislost mezi S (škoda, riziko) a PI , ale $PI > E(S)$, kde $E(\)$ je očekávaná hodnota.
- ➔ Držené riziko (Retained risk) = $\mathfrak{R}(S)$. Toto je riziko, které zůstane cedentovi po aplikaci všech zajištných ochran.
- ➔ Náklad na držený kapitál cedenta = $\alpha \cdot Std[\mathfrak{R}(S)]$, kde Std je zkratka pro směrodatnou odchylku. Parametr α je fixní a nezáporný.
- ➔ Zajištěné (cedované) riziko = $\sum_{i=1}^n T_i(S)$, kde T_i je jedna ze zajištných ochran (jako je QS, Surplus, Stop Loss nebo Excess of Loss).
- ➔ Zajistný Loading = $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot E[T_i(S)]$ s $\lambda_i (\geq 0)$. Obecně faktor pro Loading λ_i může být rozdělen do 2 částí:
 - ➔ První část je opravdu placena zajistiteli (financuje jeho náklady a hrubou marži),
 - ➔ Druhá část (přímý a nepřímý náklad) má být hrazen cedentem za správu a přípravu zajištných smluv.

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Popis

→ Platí následující:

$$S = \mathfrak{R}(S) + \sum_{i=1}^n T_i(S) \text{ z toho plyne } E[S] = E[\mathfrak{R}(S)] + E\left[\sum_{i=1}^n T_i(S)\right] \text{ a také}$$
$$Std[S] \leq Std[\mathfrak{R}(S)] + Std\left[\sum_{i=1}^n T_i(S)\right].$$

→ Definujeme hrubý zisk G_1 cedentova portfolia po zajištění takto:

„**Přijaté pojistné** minus **držené riziko** minus **zajistný náklad** minus **náklad na držený kapitál**“ nebo

$$G_1 = PI - \mathfrak{R}(S) - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \cdot E[T_i(S)] - \alpha \cdot Std[\mathfrak{R}(S)].$$

Potom je očekávaný zisk rovný:

$$E[G_1] = PI - E[\mathfrak{R}(S)] - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \cdot E[T_i(S)] - \alpha \cdot Std[\mathfrak{R}(S)]$$
$$= PI - E(S) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot E[T_i(S)] - \alpha \cdot Std[\mathfrak{R}(S)]$$

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Popis

- Chceme maximalizovat očekávaný zisk $E[G_1]$ při zachování fixní směrodatné odchylky drženého rizika $\text{Std}[\mathfrak{R}(S)]$. K optimalizaci zisku použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů.
- w_j je nespécifikovaný parametr, který je potřeba pro popis zajistného krytí (např. vlastní vrub v Quota Share, Line v Surplusu, priorita pro XL, SL) a μ^* je Lagrangeův multiplikátor.
- Potřebujeme vyřešit tuto rovnici pro všechna j :

$$0 = \frac{\partial E[G_1]}{\partial w_j} = \frac{\partial}{\partial w_j} \left[\text{PI} - E[\mathfrak{R}(S)] - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda_i) E[T_i(S)] \right] + (\mu^* - \alpha) \frac{\partial}{\partial w_j} [\text{Std}[\mathfrak{R}(S)]]$$

$$\text{a } \text{Std}[\mathfrak{R}(S)] = C$$

Nastavíme $\mu = \mu^* - \alpha$, pak je vidět, že se jedná o Lagrangeovu formulaci podmíněného optimalizačního problému:

$$G = \text{PI} - E(S) - \sum_{i=1}^n \lambda_i E[T_i(S)] \quad , \quad \text{Var}[\mathfrak{R}(S)] = C^2$$

$$\text{jelikož } E[S] = E[\mathfrak{R}(S)] + E\left[\sum_{i=1}^n T_i(S)\right]$$

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Popis

→ Pro $\Psi = E[G] + \mu \text{Var}[\mathfrak{R}(S)]$ jsou Lagrangeovy rovnice:

$$\partial\Psi/\partial w_j = -\sum_{i=1}^n \lambda_i (\partial/\partial w_j) E[T_i(S)] + \mu (\partial/\partial w_j) \text{Var}[\mathfrak{R}(S)] = 0$$

$$\text{s } \text{Var}[\mathfrak{R}(S)] = C^2$$

→ Pro případ $j=2$, pak se rovnice zredukuje na

$$\text{Var}[\mathfrak{R}(S)] = C^2 \quad \text{a}$$

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial E[T_i(S)]}{\partial w_1} \right\} \left\{ \frac{\partial \text{Var}[\mathfrak{R}(S)]}{\partial w_2} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial E[T_i(S)]}{\partial w_2} \right\} \left\{ \frac{\partial \text{Var}[\mathfrak{R}(S)]}{\partial w_1} \right\}$$

→ Systém Lagrangeových rovnic poskytuje první podmínky pro optimum bez ohledu na technickou specifikaci (např. podíl u Quota Share).

Při řešení předpokládáme, že $\text{Std}[\mathfrak{R}(S)] = x \text{Std}(S)$ pro $x \in [0, 1]$ a $\text{Std}(S) < \infty$.

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

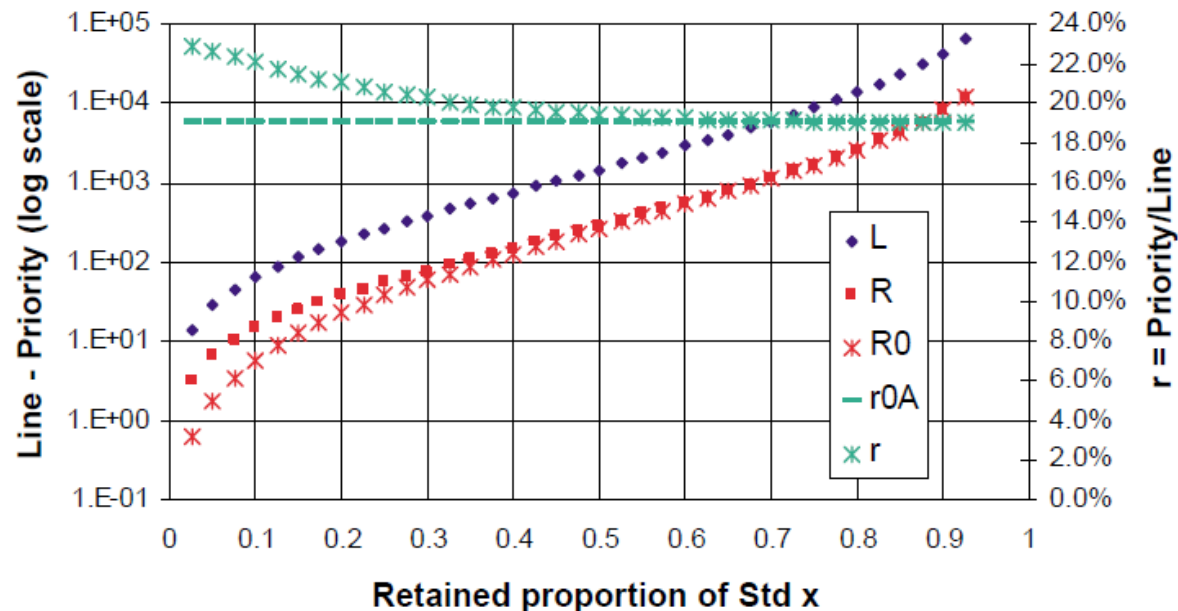
Popis

- ➔ V podkladovém dokumentu jsou uvedena řešení pro:
 - ➔ **Excess of Loss po Surplusu**
 - ➔ **Excess of Loss a Quota Share**
 - ➔ **Surplus a Quota Share**
- ➔ Nicméně v praxi stejně budeme používat pro optimalizaci spíše software, tudíž tato matematická řešení zde nebudu uvádět
- ➔ **Příklad optimalizace pro Excess of Loss po Surplusu**
- ➔ Zde je speciální případ pro $X(k) = k Z$, kde X je škoda a k je expozice, tedy $X(k)$ je škoda pro danou expozici k , Z je výše škody na jednotku expozice
- ➔ Surplus má line L , Excess of loss má prioritu R , můžeme vyjádřit r jako podíl priority R a line L : $r = R/L$.
- ➔ Na podkladová data je použita Log-Normální distribuční funkce pro získání expozice K (= pojistná částka v jednotlivých škodách) a výše škody na jednotku expozice Z

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Grafické řešení

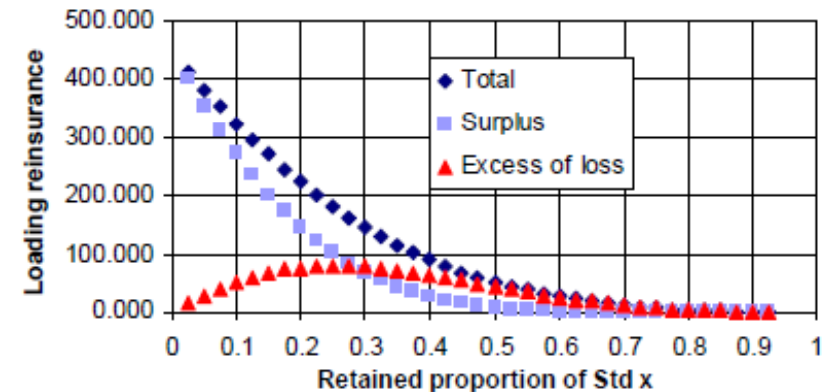
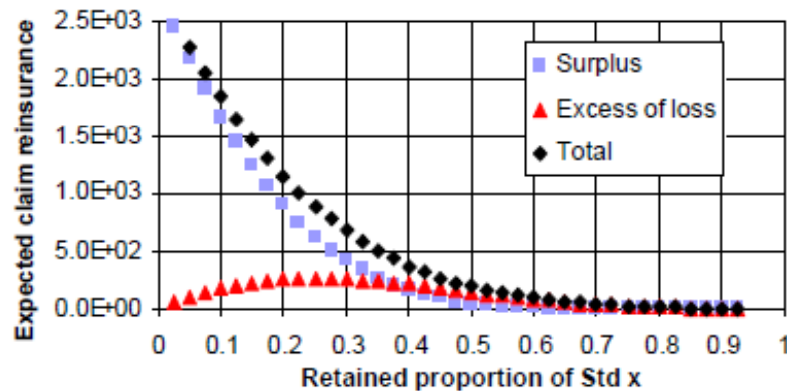
- Na grafu jsou uvedeny nejdůležitější výsledky:
 - Jako funkce držené směrodatné odchylky (retained proportion of std x) je zde optimální line Surplusu ($=L$) a optimální priorita XL ($=R$). Pro srovnání optimální priority s Excess of loss bez Surplusu je zde uvedena i priorita $R0$. Tyto hodnoty jsou uvedeny na logaritmické stupnici na levé ose.
 - Obrázek ukazuje, že s nízkou úrovní zajištění (hodnoty bližší k 1) jsou obě priority téměř shodné, tedy Surplus má jen malý vliv na vlastní vrub.
 - Na pravé straně osy je poměr $r (=R/L)$ ve srovnání s konstantním r pro $A = 0 (=r0A)$, kde $A = [\text{Var}(N) - E(N)]/E(N) \in (-1, \infty)$. Poměr r se zvyšuje s klesajícím podílem drženého rizika, z čehož vyplývá, že Surplus se stává důležitější pro zajištění s větší cedovanou částí rizika.



OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Grafické řešení

- Pro ilustraci důležitosti 2 krytí slouží ještě tyto 2 grafy:
 - Předpokládaný transfer škod k zajištění a zajištný loading podle krytí jsou na grafu zobrazeny jako funkce držené směrodatné odchylky.
 - V grafu je patrné, že pro zajištění s větší cedovanou částí rizika využijeme méně Excess of loss ve prospěch Surplusu.
 - Hodnoty optimálního krytí závisí i na zvoleném modelu.



- V tomto příkladu můžeme zdůraznit:
 - Line (=L) je poměrně silně ovlivněna, prioritou méně
 - Zajištný loading celkový odpovídá spíše Loadingu pro Surplus

OPTIMALIZACE ZAJIŠTĚNÍ

Zajistný Software

→ Software používaný pro zajištění:

→ **ReMetrica – Aon Benfield**

- *Tento software je poměrně rozšířený a obsáhlý – nabízí například Optimalizaci portfolia, zajistnou strategii, kapitálové modelování a další možnosti*
- *Tento software umožňuje optimalizaci zajištění*

→ **iWorks – SunGard**

- *Slouží k optimalizování operací pro pojištění a zajištění*

→ **FIRST (Fully Integrated Reinsurance Solutions Technology) – Reinsurance Solution LLC**

- *Systém pro zpracování cedovaného zajištění*

→ **Synergy reinsurance – Eurobase International Group**

- *Systém je určen jako podpora upisování, škod, účtů a sledování rizikové expozice*

→ **Existuje i další zajistný software**

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

Literatura

- ➔ Kombinování zajistných smluv – shrnutí a příklady:
 - ➔ **Interplay between different types of reinsurance – © Hannover Rück SE**

- ➔ Časové rozlišení a účetní metody - podklady:
 - ➔ **Time allocation and methods of accounting – © Hannover Rück SE**

- ➔ Optimalizace zajištění na základě článku [1]:
 - ➔ **Optimal reinsurance programs - An optimal combination of several reinsurance protections on a heterogeneous insurance portfolio – Robert Verlaak, Jan Beirlant**
 - Insurance: Mathematics and Economics 33 (2003)**
 - <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167668703001720>**

- ➔ Zajistný software - podklad:
 - ➔ **Monte Carlo study of reinsurance contracts – Oskar Schyberg**

Děkuji za pozornost

Iveta Grzonková

KOMBINOVÁNÍ ZAJISTNÝCH SMLUV

Dodatečná data k příkladu

→ Popis proměnných pro model a výsledek pro různé modely

Table 2
Description of the claim statistic

	N	K	Z	X	S
Mean	1225.000	125.000	0.0180	2.250	2756.250
Std	52.500	200.000	0.0900	21.530	762.738
Cv	0.04286	1.60000	5.00000	9.56870	0.27673
Skewness		7.2	280		
Burr		7.2	280		
Lognormal		8.896	140		
Value A	1.25				
Value Q	$(0.30 - 0.1625)/0.30 = 11/24 = 0.45833$				

	Double lognormal model				Double Burr model				Burr/lognormal			
	0.1	0.3	0.5	0.7	0.1	0.3	0.5	0.7	0.1	0.3	0.5	0.7
r_0A	0.18998	0.18998	0.18998	0.18998	0.24333	0.24333	0.24333	0.24333	1.281	1.281	1.281	1.281
r	0.22031	0.20244	0.19410	0.19106	0.27068	0.25721	0.24908	0.24508	1.229	1.271	1.283	1.283
L	65.643	381.506	1450.970	5897.050	60.775	296.046	941.784	3384.424	0.926	0.776	0.649	0.574
R	14.462	77.231	281.638	1126.705	16.451	76.145	234.584	829.467	1.137	0.986	0.833	0.736
Reinsurance loading												
Surplus	272.107	67.733	7.926	0.241	296.068	96.555	15.873	0.741	1.088	1.426	2.003	3.070
XL	51.838	77.793	43.541	12.013	41.337	73.194	50.962	16.323	0.797	0.941	1.170	1.359
Total	323.945	145.526	51.467	12.254	337.405	169.750	66.835	17.064	1.042	1.166	1.299	1.392
SPL%	84.0	46.5	15.4	2.0	87.7	56.9	23.7	4.3				
XL%	16.0	53.5	84.6	98.0	12.3	43.1	76.3	95.7				
Expected claim ceded to reinsurer												
Surplus	1674.505	416.816	48.775	1.485	1821.956	594.185	97.681	4.558	1.088	1.426	2.003	3.070
XL	172.793	259.310	145.138	40.043	137.791	243.981	169.873	54.410	0.797	0.941	1.170	1.359
Total	1847.298	676.127	193.913	41.528	1959.746	838.167	267.554	58.968	1.061	1.240	1.380	1.420
SPL%	90.6	61.6	25.2	3.6	93.0	70.9	36.5	7.7				
XL%	9.4	38.4	74.8	96.4	7.0	29.1	63.5	92.3				