

# Modely úrokových sazeb - teorie a praxe

Petr Myška, 7.3.2008

## 1 Úvod

Modelování úrokových sazeb je velice důležité zejména pro aplikace ve finanční matematice a aktuárských vědách. V posledních desetiletích bylo vyvinuto několik modelů, které se snaží co nejdůvěhodněji popsat chování výnosové křivky, přičemž tyto modely ve většině případů používají aparát z teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů. Po výkladu základních pojmů a základního dělení modelů se soustředíme na dva z nich a dále se budeme věnovat problémům, kterými se musí zabývat každý, kdo modely úrokových sazeb aplikuje v reálném světě. V poslední části příspěvku se budeme věnovat teoretiky často opomíjené kalibraci modelů na reálná data.

## 2 Základní proměnné a základní dělení modelů

V této kapitole definujeme následující, v teorii úrokových modelů velice často používané, proměnné:

- $R(t, T)$  - spojitě úročená spotová sazba v čase  $t$  pro splatnost  $T$
- $P(t, T)$  - cena dluhopisu s nulovým kupónem v čase  $t$  se splatností v čase  $T$

Vztah mezi  $P(t, T)$  a  $R(t, T)$  je následující:

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}. \quad (1)$$

- $r(t)$  - okamžitá úroková sazba v čase  $t$ , definovaná jako  $\lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$

Za určitých předpokladů odvodíme následující vztah mezi  $P(t, T)$  a  $r(t)$ :

$$P(t, T) = E \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) \middle| \mathfrak{F}_t \right]. \quad (2)$$

Existují dvě základní skupiny modelů úrokových sazeb: Jednofaktorové a mnohofaktorové modely. Jednofaktorové modely pracují pouze s jedním zdrojem nejistoty a jejich základní tvar modeluje výše definovanou okamžitou úrokovou sazbu. Z této sazby jsou následovně odvozeny vzorce pro dluhopisy a úrokové deriváty. Okamžitá úroková sazba tak vlastně reprezentuje celou výnosovou křivku (proto se také v další kapitole budeme zabývat problémem, která sazba má být v praxi považována za okamžitou). Mezi tyto modely patří Dothanův model, Vašíčkův model, Hull-Whiteův model, Ho-Lee model a jiné. Obecný zápis jednofaktorového modelu je následující:

$$dr(t) = \mu(t, r)dt + \sigma(t, r)dW(t). \quad (3)$$

Mnofaktorové (v praxi však víceméně pouze dvoufaktorové, protože dva faktory již dostatečně věrohodně reprezentují všechny možné tvary výnosových křivek) modely jsou komplexnější a nepracují pouze s okamžitou úrokovou sazbou. Patří mezi ně např. Brennan-Schwartzův model a CIR2 model. V tomto příspěvku se jimi nebudeme zabývat.

### 3 Okamžitá úroková sazba

Jak již bylo zmíněno, v teorii jednofaktorových úrokových modelů pracujeme s tzv. okamžitou sazbou, tedy se sazbou, která by měla odpovídat nekonečně krátkému časovému období. Taková sazba na trhu nicméně neexistuje - potřebujeme proto stanovit jejího vhodného reprezentanta. Nabízí se myšlenka je pracovat s nejkratší sazbou, která existuje - tedy s overnight O/N sazbou. Je však rozumné považovat takovou sazbu za vhodného reprezentanta celé výnosové křivky? Odpověď se pokusíme nalézt aplikací shlukové analýzy.

#### 3.1 Shluková analýza výnosových křivek

Pro připomenutí uvedeme, že shluková analýza provádí rozklad souboru dat na několik relativně homogenních podsouborů (shluků) tak, aby objekty uvnitř jednotlivých shluků si byly co nejvíce podobné a objekty patřící do různých shluků si byly podobné co nejméně. Klíčovou proměnou je tzv. míra nepodobnosti, kterou zdefinujeme následovně:

Předpokládejme, že máme k dispozici historii několika sazeb s různými splatnostmi. Označme  $f_i(t)$  hodnotu  $i$ -té sazby v čase  $t$  a definujme veličinu  $\Delta f_i(t) = f_i(t + \Delta t) - f_i(t)$ , kde  $\Delta t$  budeme považovat rovnu jednomu pracovnímu dni.  $\Delta f_i(t)$  tedy značí mezidenní změnu příslušné úrokové sazby. Nyní stanovíme míru závislosti mezi křivkami  $i$  a  $j$   $c_{ij}$  následujícím způsobem:

$$c_{ij} = \frac{\langle \Delta f_i(t) \Delta f_j(t) \rangle - \langle \Delta f_i(t) \rangle \langle \Delta f_j(t) \rangle}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (4)$$

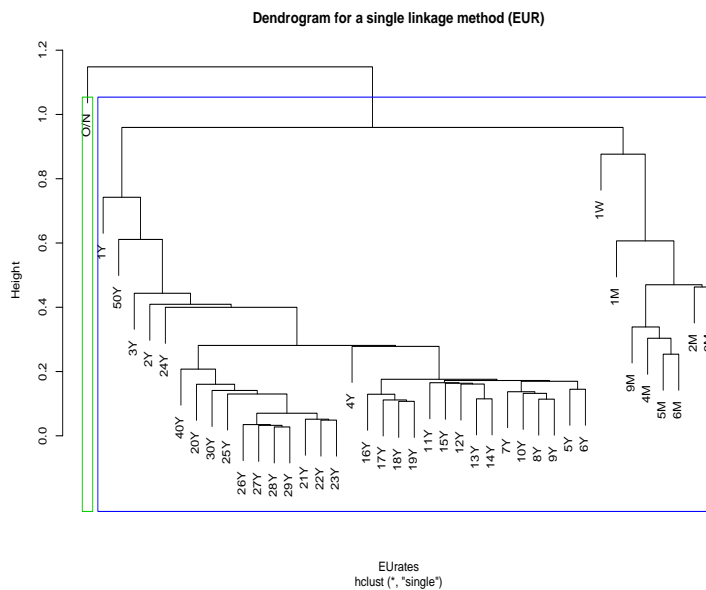
kde symbol  $\langle \dots \rangle$  značí průměr a  $\sigma_i$  značí směrodatnou odchylku  $\Delta f_i(t)$ . Veličina  $c_{ij}$  tedy odpovídá korelaci mezidenních změn dvou úrokových sazeb  $i$  a  $j$ .

Míru nepodobnosti  $d_{ij}$  pak podle [3] definujeme následovně:

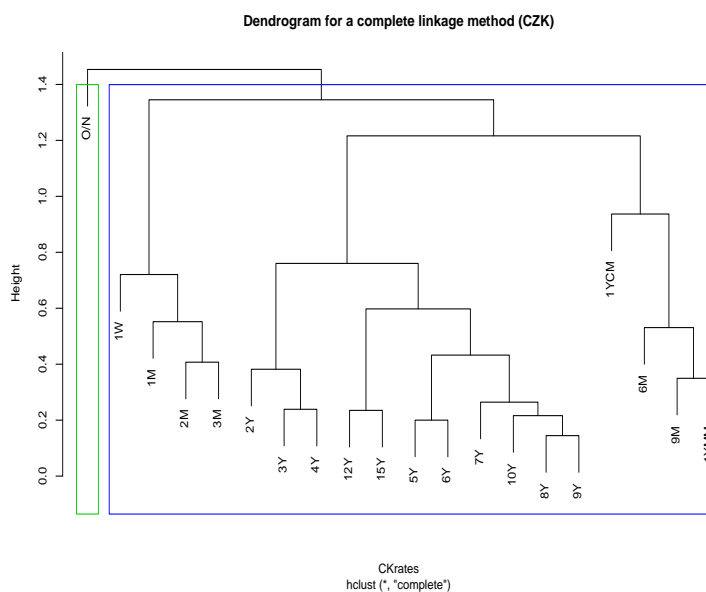
$$d_{ij} = \sqrt{2(1 - c_{ij})}. \quad (5)$$

Shlukovou analýzu provedeme ve statistickém prostředí  $R$ . Pro analýzu sazeb EUR použijeme metodu nejbližšího souseda (nearest neighbour). Příslušný dendrogram (obr. 1) prokazuje, že O/N sazba vykazuje určitou anomálii v porovnání se zbytkem výnosové křivky. Dá se tedy říci, že O/N sazba (platí i pro 1W sazbu) není vhodným reprezentantem EURové výnosové křivky a při modelování je vhodnější používat sazby 2W-6M. Povšimněme si ještě skutečnosti, že pro práh = 0.9 se sazby dělí do tří shluků - O/N sazba, sazby peněžního trhu a sazby kapitálového trhu, což mimo jiné potvrzuje teorii oddělených trhů. Aplikací jiných metod shlukové analýzy dostaneme podobné výsledky.

Shluková analýza byla aplikována rovněž pro CZK výnosové křivky. Obrázek 2 je dendrogramem pro metodu nejbližšího souseda (nearest neighbour) a vyplývají z něj stejné závěry jako pro EUR sazby. Opět platí, že aplikací jiných metod shlukové analýzy dostaneme podobné výsledky.



Obrázek 1: Shluková analýza EUR výnosové křivky



Obrázek 2: Shluková analýza CZK výnosové křivky

### 3.2 Závěr

Z předchozího vyplývá, že při modelování okamžité úrokové sazby není vhodné O/N sazbu považovat za vhodného reprezentanta výnosové křivky, protože je příliš "nepodobná" ostatním sazbám. Okamžitou úrokovou sazbu je praktičtější reprezentovat 2W, 1M, 3M nebo dokonce i 6M sazbou.

## 4 Afinní časové struktury

Motivací pro zavedení pojmu affinní časové struktury je nalezení společných znaků pro určitou dost velkou skupinu jednofaktorových modelů. Na základě těchto znaků pak mohou být pro celou skupinu odvozeny určité společné závěry, které usnadňují a zrychlují práci. Jako příklad uveďme odvození ceny dluhopisu. V zásadě existují tři způsoby, jak ji stanovit:

1. Přímé odvození z rovnice  $P(t, T) = E \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) | \mathfrak{F}_t \right]$ .

2. Řešení Black-Scholes-Mertonovy PDE:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \mu \frac{\partial P}{\partial r} - rP &= 0 \\ P(T, T) &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

3. Využití Afinní časové struktury.

Odvození podle Ad 1 a Ad 2 bývají většinou poměrně komplikované, zatímco při znalosti teorie z Ad 3 je odvození relativně rychlé. Teorii Ad 3 nyní rozebereme - podle definice má model afinní časovou strukturu, jestliže platí:

$$P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}. \quad (7)$$

Pokud mají koeficienty v obecném jednofaktorovém modelu (3) následující tvar

$$\begin{aligned} \mu(t, r) &= \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t, r) &= \sqrt{\chi(t)r + \delta(t)}, \end{aligned}$$

a  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$ ,  $\chi(t)$  a  $\delta(t)$  jsou deterministické funkce, pak lze dokázat, že takový model má afinní časovou strukturu.

Dosadíme-li do Black-Scholes-Mertonovy PDE (6) vyjádření  $P(t, T)$  ze (7) a spojíme-li členy se stejnou mocninou u  $r(t)$ , dostaneme následující soustavy obyčejných diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dt} + \alpha B - \frac{1}{2} \chi B^2 &= -1, \\ B(T, T) &= 0, \\ \frac{dA}{dt} - \beta B + \frac{1}{2} \delta B^2 &= 0, \\ A(T, T) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Ze soustavy těchto rovnic získáme vztahy pro  $A(t, T)$  a  $B(t, T)$ , z nichž posléze podle (7) dostaneme  $P(t, T)$ . Pro většinu modelů je řešení takové soustavy rovnic o dost snazší než odvozování cen dluhopisů pomocí Black-Scholes-Mertonovy PDE nebo přímé odvození ze základní rovnice modelu.

## 5 Jednofaktorové modely

Obecná rovnice jednofaktorových modelů (3) je podobná rovnici pro obecnou cenu akcie: Jedná se o součet deterministické a stochastické složky, přičemž náhodnost je reprezentována Wienerovým procesem. Konkrétní zápis rovnice by měl splňovat určité vlastnosti, které pozorujeme u chování úrokových sazeb - na model tedy máme určité požadavky (nicméně platí, že tyto požadavky nejsou vždy všechny splněny, často spolu totiž navzájem kolidují): Nezápornost  $r(t)$ , "rozumné" rozdělení  $r(t)$ , zahrnutí očekávání trhu (tedy forwardových sazeb), existence explicitních vzorců pro ceny dluhopisů a úrokových derivátů, atd. Existuje rovněž hypotéza (a tedy další požadavek na modely), že se hodnoty  $r(t)$  vrací k určité rovnovážné hodnotě (nebo k hodnotám daným časem). Poslední vlastnost splňují procesy, které pracují s tzv. návratností ke středu (mean reversion). V dalším se soustředíme na dva jednofaktorové modely s návratností ke středu: Vašíčkův a Hull-Whiteův.

### 5.1 Vašíčkův model

Vašíčkův model popisuje následující rovnice:

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma dW(t), r(0) = r_0.$$

Jedná se o model, kde je rovnovážná hodnota reprezentována parametrem  $\theta$  a parametr  $k$  popisuje rychlost návratnosti (obvyčejně mívá hodnotu mezi 0.01 - 0.3) k této hodnotě. Stojí za povšimnutí, že se ve stochastickém sčítání nevyskytuje  $r(t)$  - parametr  $\sigma$  tedy značí absolutní volatilitu okamžité úrokové sazby. Vzhledem k tomu, že rovnovážná hodnota  $\theta$  nezávisí na čase, jedná se o časově homogení model - v rovnici totiž není zohledněna forwardová křivka, návrat probíhá pouze k jedné hodnotě. Modely s touto vlastností (nezohlednění aktuální výnosové křivky - ekvivaletní s nezohledněním forwardové křivky) se nazývají endogenní. Po stanovení cen dluhopisů totiž dostaneme výnosovou křivku, která je tedy výstupem modelu. Modely, kde je výnosová křivka vstupem (např. Hull-Whiteův), se nazývají exogenní.

#### Explicitní vztah pro $r(t)$

Pro určení dalších vlastností modelu nejprve odvodíme  $r(t)$  v závislosti na  $r(s)$ . Začneme diferencováním členu  $r(u)e^{-k(t-u)}$ :

$$d(r(u)e^{-k(t-u)}) = dr(u)e^{-k(t-u)} + r(u)ke^{-k(t-u)}du.$$

Základní rovnici Vašíčkova modelu nyní vynásobíme  $e^{-k(t-u)}$ :

$$dr(u)e^{-k(t-u)} = e^{-k(t-u)}k(\theta - r(u))du + \sigma e^{-k(t-u)}dW(u).$$

Dosazením druhé rovnice do první pak dostaneme:

$$\begin{aligned} d(r(u)e^{-k(t-u)}) &= e^{-k(t-u)}k\theta du - r(u)ke^{-k(t-u)}du + r(u)ke^{-k(t-u)}du + \sigma e^{-k(t-u)}dW(u) \\ &= e^{-k(t-u)}k\theta du + \sigma e^{-k(t-u)}dW(u). \end{aligned}$$

Po integraci s mezemi  $s$  a  $t$  dostaneme rovnici pro  $r(t)$ :

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) + \sigma \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u). \quad (9)$$

Z rovnice (9) plyne, že  $r(t)$  má normální rozdělení s následujícími parametry:

$$\begin{aligned} E[r(t)|\mathfrak{F}_s] &= r(s)e^{-k(t-s)} + \theta(1 - e^{-k(t-s)}) \\ \text{var}[r(t)|\mathfrak{F}_s] &= \sigma^2 E \left( \int_s^t e^{-k(t-u)} dW(u) \right)^2 = \sigma^2 E \int_s^t e^{-2k(t-u)} du \\ &= \frac{\sigma^2}{2k} [1 - e^{-2k(t-s)}]. \end{aligned} \quad (10)$$

### Záporné sazby

Z normality  $r(t)$  plyne jeden z nedostatků Vašíčkova modelu - existuje poměrně vysoká pravděpodobnost, že modelované sazby budou záporné (vztah pro pravděpodobnost odvodíme z (10)):

$$P[r(t) < 0] = \Phi \left[ -\frac{r(0)e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})}} \right]. \quad (11)$$

V následující tabulce jsou spočteny pravděpodobnosti zápornosti  $r(t)$  sazeb. V řádcích je  $t = 1, \dots, 10$ , ve sloupcích jsou počáteční hodnoty  $r(0)$ . Parametry modelu jsou  $k = 0.1, \theta = 0.025, \sigma = 0.006$ . Přirozeně platí, že pravděpodobnosti rostou se zmenšujícím se  $r(0)$  a většinou rostou se zvyšujícím se  $t$ .

| $t \backslash r(0)$ | <b>0.50%</b> | <b>1.00%</b> | <b>1.50%</b> | <b>2.00%</b> | <b>2.50%</b> | <b>3.00%</b> | <b>4.00%</b> | <b>5.00%</b> |
|---------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| <b>1</b>            | 11.34%       | 2.27%        | 0.26%        | 0.02%        | 0.00%        | 0.00%        | 0.00%        | 0.00%        |
| <b>2</b>            | 13.14%       | 4.94%        | 1.45%        | 0.33%        | 0.06%        | 0.01%        | 0.00%        | 0.00%        |
| <b>3</b>            | 12.92%       | 6.17%        | 2.55%        | 0.91%        | 0.28%        | 0.07%        | 0.00%        | 0.00%        |
| <b>4</b>            | 12.21%       | 6.67%        | 3.30%        | 1.48%        | 0.60%        | 0.22%        | 0.02%        | 0.00%        |
| <b>5</b>            | 11.38%       | 6.80%        | 3.79%        | 1.97%        | 0.95%        | 0.43%        | 0.07%        | 0.01%        |
| <b>6</b>            | 10.56%       | 6.74%        | 4.10%        | 2.36%        | 1.29%        | 0.67%        | 0.15%        | 0.03%        |
| <b>7</b>            | 9.78%        | 6.59%        | 4.27%        | 2.66%        | 1.59%        | 0.91%        | 0.27%        | 0.07%        |
| <b>8</b>            | 9.08%        | 6.38%        | 4.35%        | 2.88%        | 1.85%        | 1.15%        | 0.40%        | 0.13%        |
| <b>9</b>            | 8.44%        | 6.15%        | 4.38%        | 3.05%        | 2.07%        | 1.37%        | 0.56%        | 0.21%        |
| <b>10</b>           | 7.87%        | 5.92%        | 4.37%        | 3.17%        | 2.25%        | 1.57%        | 0.72%        | 0.31%        |

## Ceny dluhopisů

Vašíčkův model má afinní časovou strukturu, takže za použití rovnic (8) poměrně rychle odvodíme cenu dluhopisu  $P(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}$ :

$$\alpha(t) = -k, \beta(t) = k\theta, \chi(t) = 0, \delta(t) = \sigma^2,$$

$$\frac{dB}{dt} - kB = -1, B(T, T) = 0$$

$$\implies B(t, T) = \frac{1}{k}[1 - e^{-k(T-t)}]$$

$$\frac{dA}{dt} + k\theta B + \frac{1}{2}\sigma^2 B^2 = 0, A(T, T) = 0$$

$$\implies A(t, T) = \left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)[B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4k}B(t, T)^2.$$

Z Vašíčkova modelu se dále dají odvodit explicitní vzorce pro ceny opcí na bezkupónové dluhopisy a úrokové opce, nicméně jejich vzorce zde nebudeme uvádět.

Při kalibraci parametrů Vašíčkova modelu na aktuální výnosovou křivku se jako nevýhoda projeví již zmíněná endogenost: Máme-li na trhu k dispozici křivku dluhopisů  $T \rightarrow P^M(0, T)$  (odvodí se z výnosové křivky) a požadujeme, aby náš model odpovídal této křivce, musíme stanovit parametry tak, aby se ceny dluhopisů získané z modelu co nejvíce blížily tržním cenám. Ačkoliv existuje pouze konečný počet takových cen  $P^M(0, T)$ , nemohou tři parametry modelu dostatečně interpretovat celou časovou strukturu. Problémy způsobuje i možná neinterpretovatelnost jejich odhadnutých hodnot. Některé výnosové křivky (např. invertované) dokonce nemohou být získány pro žádné hodnoty parametrů. Problematice kalibrace je věnována jedna z dalších kapitol.

Jak již bylo uvedeno, první velkou nevýhodou Vašíčkova modelu je již zmíněná možnost záporných sazeb. Druhou nevýhodou je návratnost pouze k jedné hodnotě, tzn. ignorování forwardové křivky. Obě nevýhody jsou téměř eliminovány v Hull-Whiteově modelu:

## 5.2 Hull-Whiteův model

Hull a White navrhli vylepšení Vašíčkova modelu tak, že konstantní rovnovážnou hodnotu  $\theta$  změnili na funkci času  $\vartheta(t)$ . Proces okamžité úrokové sazby se pak vyvíjí následovně:

$$dr(t) = (\vartheta(t) - kr(t))dt + \sigma dW(t), r(t) = r_0. \quad (12)$$

Hodnoty návratnosti ke středu  $\vartheta(t)$  musí být zvoleny tak, aby odpovídaly aktuální časové struktuře pozorované na trhu - modelované hodnoty se tedy ve střední hodnotě musí rovnat pozorovaným forwardovým sazbám. Ty zde budou reprezentovány pomocí tzv. tržní okamžité úrokové sazby  $f^M(0, t)$ , která odpovídá forwardové sazbě pozorované v čase 0 pro čas  $T$  na nekonečně krátký časový okamžik. Rigorózně je definována následovně:

$$f^M(0, T) = \frac{\partial \ln P^M(0, T)}{\partial T},$$

kde  $P^M(0, t)$  je tržní cena dluhopisu v čase 0 se splatností v čase  $T$ .

Odvodováním dostaneme následující vztah pro  $\vartheta(t)$ :

$$\vartheta(t) = \frac{\partial f^M(0, t)}{\partial T} + kf^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt}).$$

Rovnici (12) pak lze převést na následující tvar:

$$\begin{aligned} r(t + dt) - r(t) &= (f^M(0, t + dt) - f^M(0, t)) - k(r(t) - f^M(0, t))dt + \\ &+ \frac{\sigma^2}{2k}(1 - e^{-2kt})dt + \sigma(W(t + dt) - W(t)). \end{aligned} \quad (13)$$

Rovnici (13) interpretujeme následovně: Změna  $r(t)$  odpovídá vývoji forwardové sazby (1. sčítanec) a současně se k této sazbě přibližuje (2. sčítanec). Třetí sčítanec je zbytek po integraci a bývá zanedbatelně malý, 4. sčítanec je náhodná složka.

Obdobně jako u Vašíčkova modelu odvodíme  $r(t)$  v závislosti na  $r(s)$ :

$$r(t) = r(s)e^{-k(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-k(t-s)} + \int_s^t e^{-k(t-u)}dW(u).$$

Platí, že  $r(t)$  má opět normální rozdělení s následujícími parametry:

$$\begin{aligned} E[r(t)|\mathfrak{F}_s] &= r(s)e^{-k(t-s)} + \alpha(t) - \alpha(s)e^{-k(t-s)} \\ \text{var}[r(t)|\mathfrak{F}_s] &= \frac{\sigma^2}{2k}[1 - e^{-2kt}]. \end{aligned}$$

## Ceny dluhopisů

Obdobně jako u Vašíčkova modelu (HW model má afinní časovou strukturu) získáme cenu bezkupónového dluhopisu  $P(t, T)$ . Jelikož se HW model řadí mezi exogenní modely, je výnosová křivka (zde tržní ceny dluhopisů) vstupem modelu. Ceny modelových dluhopisů tak přímo závisí na tržních cenách dluhopisů, tedy na aktuální výnosové křivce (prostřednictvím veličin  $P^M(0, T)$  a  $f^M(0, T)$ ):

$$\begin{aligned} P(t, T) &= e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)} \\ B(t, T) &= \frac{1}{k} [1 - e^{-k(T-t)}] \\ A(t, T) &= \log \left[ \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \right] + B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^2}{4k}(1 - e^{-2kt})B(t, T)^2. \end{aligned}$$

Ještě ověříme, zda je odvození korektní pro  $t = 0$ : Mělo by nám totiž vyjít  $P(0, T) = P^M(0, T)$ :

$$P(0, T) = P^M(0, T) \exp \{B(0, T)f(0, 0) - B(0, T)r(0)\} = P^M(0, T).$$

## Záporné sazby

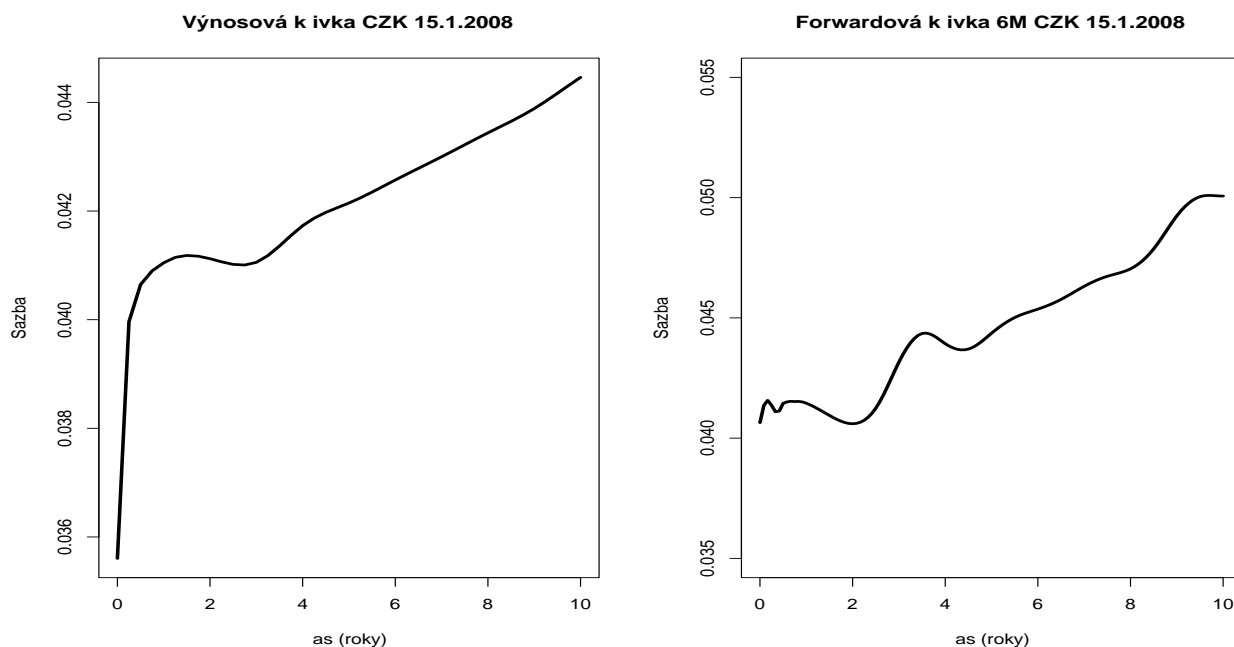
U Vašíčkova modelu jsme zmínili poměrně velkou nevýhodu spočívající v možné zápornosti úrokových sazeb. Rozdělení sazeb u HW modelu je sice rovněž normální, tedy pravděpodobnost záporných sazeb je také nenulová, nicméně při rozumných hodnotách parametrů zanedbatelná, jak je patrné z tabulky:



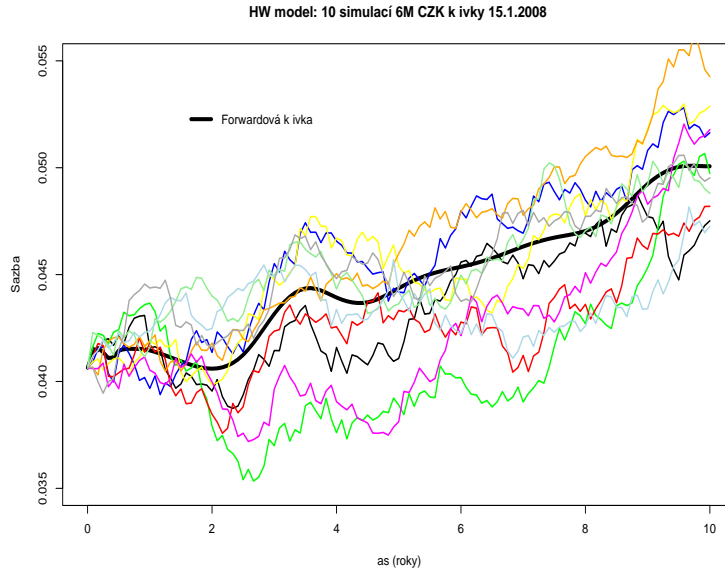
| $t \backslash r(0)$ | 0.50% | 1.00% | 1.50% | 2.00% | 2.50% | 3.00% | 4.00% | 5.00% |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                   | 4.81% | 0.71% | 0.06% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| 2                   | 3.45% | 0.97% | 0.21% | 0.04% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| 3                   | 2.00% | 0.73% | 0.23% | 0.06% | 0.02% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| 4                   | 1.04% | 0.45% | 0.18% | 0.06% | 0.02% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |
| 5                   | 0.49% | 0.24% | 0.11% | 0.05% | 0.02% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |
| 6                   | 0.21% | 0.12% | 0.07% | 0.03% | 0.02% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |
| 7                   | 0.08% | 0.05% | 0.03% | 0.02% | 0.01% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |
| 8                   | 0.03% | 0.02% | 0.02% | 0.01% | 0.01% | 0.01% | 0.00% | 0.00% |
| 9                   | 0.01% | 0.01% | 0.01% | 0.01% | 0.01% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |
| 10                  | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% | 0.00% |

### Ilustrace na grafech

Na následujících grafech je vykreslena CZK AA výnosová křivka z 15.1.2008 (její hodnoty byly získány ze systému Bloomberg) a jí odpovídající forwardová křivka pro 6M splatnost. Na základě této forwardové křivky je v dalším grafu vykresleno 10 simulací 6M sazby (forwardová křivka je v tomto grafu tučně vyznačena). Povšimněme si, že trend simulací kopíruje trend forwardové křivky.



Obrázek 3: Výnosová a forwardová křivka CZK



Obrázek 4: Simulace 6M CZK křivky

## Ceny derivátů

Stejně jako pro Vašíčkův model lze i pro HW model odvodit explicitní ceny některých úrokových derivátů. Zde odvodíme pomocí ceny call opce na dluhopis hodnotu úrokové put opce (flooru).

Bez odvození uvedeme, že cena evropské call-opce v čase  $t$  a splatností v  $T$  na zero-bond se splatností v  $S$  a realizační cenou  $K$  je následující:

$$\begin{aligned} \text{ZBC}(t, T, S, K) &= P(t, S)\Phi(h) - KP(t, T)\Phi(h - \sigma_p) \\ \sigma_p &= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2k(T-t)}}{2k}} B(T, S) \\ h &= \frac{1}{\sigma_p} \log \frac{P(t, S)}{P(t, T)K} + \frac{\sigma_p}{2}. \end{aligned}$$

Nyní odvodíme cenu úrokové put-opce (flooru) v čase  $t$  s realizací v čase  $T$  na sazbu s tenorem  $\tau$  a s realizační sazbou  $X$ . Cenu s danými parametry budeme značit  $\text{Floor}(t, T, \tau, X)$ . Pro její výplatní funkce v čase  $T$  platí:

$$\text{Payoff} = \frac{1}{1 + i\tau} \max(\tau(X - i); 0).$$

Cenu odvodíme z ceny call-opce se splatností v  $T$  na dluhopis se splatností v  $T + \tau$ . Budeme upravovat její výplatní funkci tak, abychom dostali výplatní cenu požadovaného flooru.

$$\begin{aligned} \text{Payoff}_{\text{ZBC}} &= \max\left(\frac{1}{1 + i\tau} - K; 0\right) = \frac{1}{1 + i\tau} \max(1 - K - iK\tau; 0) \\ &= \frac{1}{1 + i\tau} K \max\left(\left(\frac{1 - K}{\tau K} - i\right) \tau; 0\right) = K \text{Floor}(t, T, \tau, \frac{1 - K}{\tau K}). \end{aligned}$$

Výraz  $\frac{1-K}{\tau K}$  bude roven  $X$ . Snadno odvodíme, že  $K = \frac{1}{1+X\tau}$ .

Cena flooru tedy je:

$$\text{Floor}(t, T, \tau, X) = (1 + \tau X) \text{ZBC} \left( t, T, S, \frac{1}{1 + \tau X} \right).$$

Obdobně (nebo přes put-call paritu) získáme i cenu úrokové call opce (capu).

Vzorce pro ceny těchto derivátů využijeme v další kapitole, kdy se pomocí nich budeme snažit získat parametry modelu z aktuálních tržních dat.

## 6 Kalibrace

Je zřejmé, že pro kvalitní aplikaci modelů úrokových sazeb je nutné pracovat s takovými hodnotami parametrů, které co nejdříve popisují skutečnost. Obecně se metody kalibrace dělí do dvou skupin:

1. Dynamické metody kalibrace - Tento přístup odhaduje parametry z historických hodnot úrokových sazeb.
2. Statické metody kalibrace - Tento přístup odhaduje parametry z aktuálních tržních dat (tzn. z aktuální výnosové křivky a aktuálních cen derivátů).

Obecně platí, že dynamické metody se používají pro kalibraci endogenních modelů, kdy je poměrně snadné získat na základě pozorovaných hodnot okamžité sazby vzorce pro odhady parametrů. Naopak statické metody jsou vhodné pro kalibraci exogenních modelů, protože se pak nemusíme zabývat hodnotami výnosové křivky (ta je vstupem modelu), ale pouze hodnotami derivátů.

### 6.1 Dynamické metody kalibrace

Na příkladu popíšeme dynamickou kalibraci Vašíčkova modelu založenou na aplikaci metody maximální věrohodnosti. Okamžitou sazbu bude reprezentovat 3M sazba. Při kalibraci použijeme normalitu sazeb  $r(t)$  - parametry viz. (9). Pro přehlednější práci označme veličinou  $V^2$  rozptyl  $r(t)$  v závislosti na  $\mathfrak{F}_s$  a  $\alpha = e^{-k(t-s)}$ . Časová délka  $t - s$  bude rovna jednomu pracovnímu dni. Předpokládejme, že máme k dispozici  $n+1$  historických hodnot (za  $n+1$  dní) 3M sazeb  $r_0, r_1, \dots, r_n$ . Pak platí:

$$r_{i+1} = \alpha r_i + \theta(1 - \alpha) + e_i, e_i \sim N(0, V^2). \quad (14)$$

Věrohodnostní funkce mají následující tvar:

$$L((r_0, \dots, r_n), \alpha, \theta, V^2) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{2\pi V^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{(r_i - \alpha r_{i-1} - \theta(1 - \alpha))^2}{2V^2} \right) \quad (15)$$

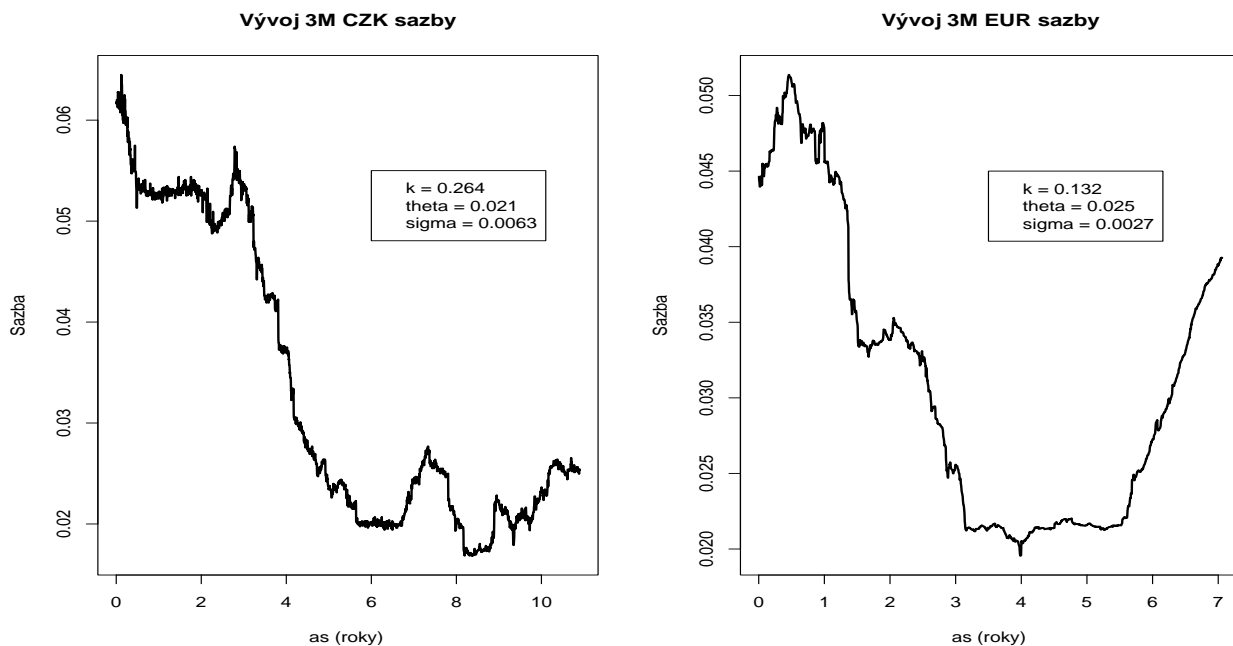
$$\log L = \frac{n}{2} \log \left( \frac{1}{2\pi V^2} \right) - \frac{1}{2V^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \alpha r_{i-1} - \theta(1 - \alpha))^2. \quad (16)$$

Odvodíme parciální derivace, položíme je rovny nule a po chvíli počítání dostaneme odhady všech tří parametrů základní rovnice Vašíčkova modelu:

$$\hat{k} = -\frac{\log(\hat{\alpha})}{t-s} = -\frac{1}{t-s} \log \left( \frac{n \sum_{i=1}^n r_i r_{i-1} - \sum_{i=1}^n r_i \sum_{i=1}^n r_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n r_{i-1}^2 - \left( \sum_{i=1}^n r_{i-1} \right)^2} \right),$$

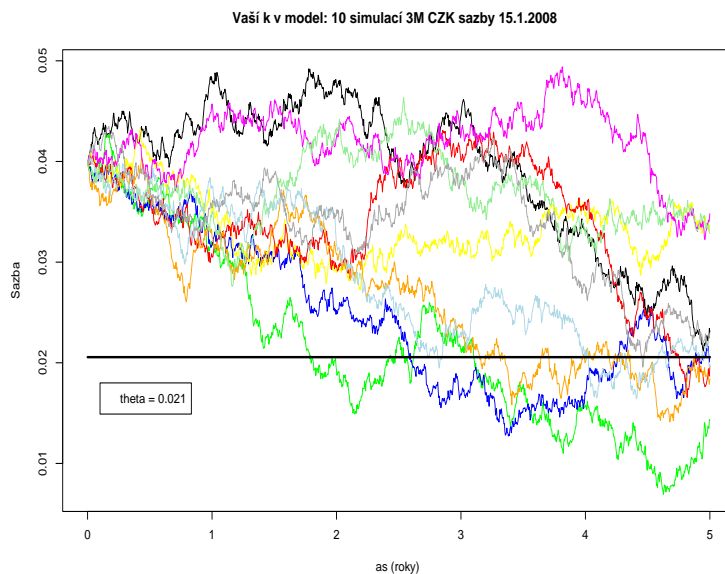
$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} r_{i-1}]}{n(1 - \hat{\alpha})}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{2\hat{k} \sum_{i=1}^n [r_i - \hat{\alpha} r_{i-1} - \hat{\theta}(1 - \hat{\alpha})]^2}{1 - e^{-2\hat{k}(t-s)}}. \quad (17)$$

Na prvním grafu na obrázku 5 vidíme průběh 11-leté historie 3M CZK AA sazby získané ze systému Bloomberg společně s odhadnutými parametry. Na druhém grafu je to samé pro 3M EUR AA sazbu (7-letá historie):



Obrázek 5: Vývoj 3M CZK a EUR sazeb

Na obrázku 6 jsou nasimulovány 3M CZK sazby ve Vašíčkově modelu za použití odhadnutých parametrů. Z obrázku je patrná konvergence k hodnotě  $\theta = 2.10\%$ :



Obrázek 6: Simulace 3M sazby

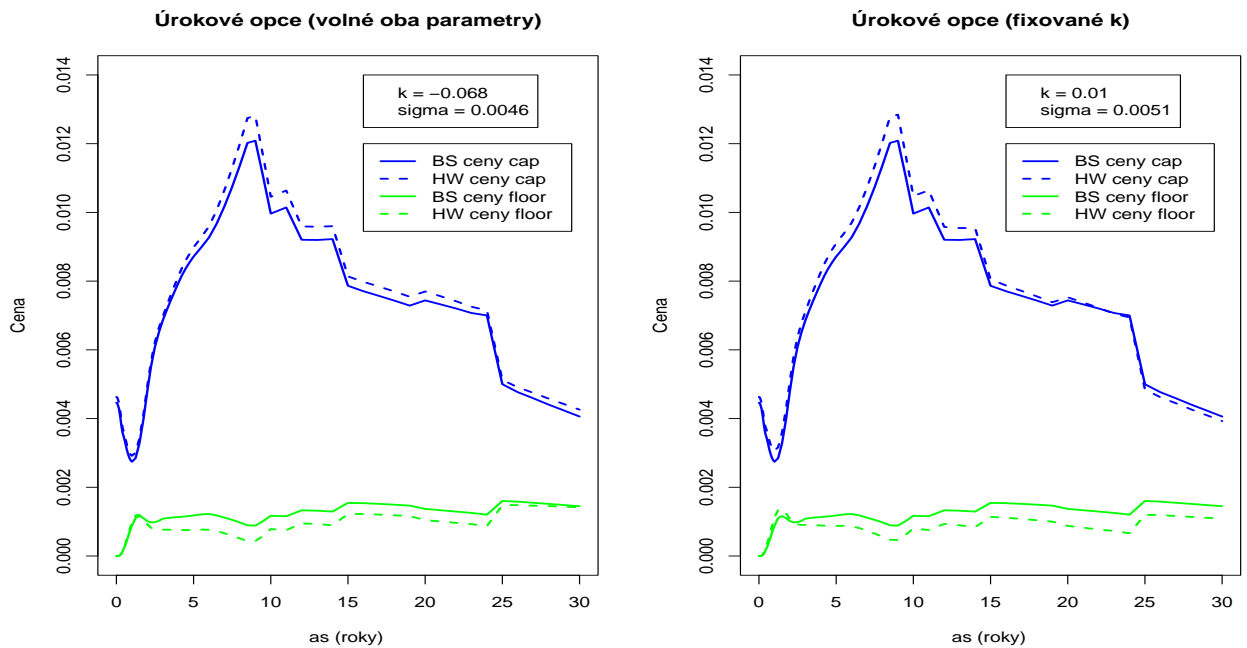
Přirozeně platí, že získané hodnoty nemusí odpovídat skutečné situaci na trhu: po dosažení do vzorců pro ceny dluhopisů a úrokových derivátů můžeme dostat ceny zcela odlišné od tržních. Výhodou naopak je, že parametry jsou spočtené exaktními výpočty a že obdržené výsledky jsou většinou interpretovatelné.

Co se týká exogenních modelů, není tento druh kalibrace příliš vhodný, protože je poměrně značným problémem, jakým způsobem zahrnout do výpočtu  $\vartheta(t)$ , tedy historii forwardových křivek.

## 6.2 Statické metody kalibrace

Jak již bylo uvedeno, používají se statické metody v převážné většině pro exogenní modely. Pro tento druh modelů se snažíme stanovit takové hodnoty parametrů, abychom se modelovými cenami derivátů (výnosovou křivkou ne - ta je vstupem těchto modelů, takže ji při kalibraci nebereme v úvahu) co nejvíce přiblížili tržním cenám derivátů. Připomeňme, že na trhu jsou ceny derivátů reprezentovány implikovanou volatilitou z Black-Scholesova modelu. Z této volatility stanovíme ceny derivátů a následně (většinou metodou nejmenších čtverců) parametry daného modelu.

Na následujících grafech vidíme výsledek kalibrace HW modelu na ceny capů a floorů: Na levém grafu metodou nejmenších čtverců získáme  $k$  i  $\theta$ . Vidíme, že parametr návratnosti ke středu vychází záporný (-0.068), což znamená, že sazby divergují od forwardové křivky. Takový výsledek není příliš uspokojivý, proto  $k$  zafixujeme na co nejmenší hodnotu (zde 0.01) a hýbáme pouze s  $\theta$ . Výsledkem je pravý graf. Je patrné, že zejména ceny floorů jsou od reality na pravém grafu vzdálenější než ceny floorů na levém grafu, nicméně v pravém grafu máme rozumnější hodnoty parametrů.



Obrázek 7: Kalibrace na tržní hodnoty

Z výsledků tohoto příkladu plyne jedna z nevýhod statické kalibrace - potenciální neinterpretovatelné hodnoty odhadnutých parametrů. Naproti tomu dynamické metody dávají téměř vždy rozumné výsledky.

Použití statické kalibrace pro endogenní modely není příliš vhodné, protože máme příliš mnoho vstupních dat (nejen ceny derivátů, ale i výnosovou křivku) a málo parametrů modelu. Pokud bychom chtěli nakalibrovat Vašíčkův model pouze na výnosovou křivku, můžeme pro data z 15.1.2008 dostat následující, na první pohled nesmyslné, hodnoty:  $\theta = 0.00079$ ,  $k = 0.92766$ ,  $\sigma = -0.00000081$ .

## Literatura

- [1] Brigo, D., Mercurio, F.: Interest rate models. Springer Finance. Berlin 2001.
- [2] Málek, J.: Dynamika úrokových měr a úrokové deriváty. Publisher EKOPRESS. Praha 2005.
- [3] Matteo, Di T., Aste, T., Mantegna, R. N.: An interest rates cluster analysis. [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com). Palermo 2006.