



Ekonomické scénáře pro oceňování závazků z životního pojištění

Seminář z aktuárských věd

20. 12. 2013

Martin Jusko



Kooperativa
VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je

Otázky

- ? co jsou ekonomické scénáře
- ? proč a jak se používají při oceňování toků z životního pojištění
- ? co je generátor ekonomických scénářů
- ? jak může generátor vypadat (příklad)
- ? jak vypadá kalibrace parametrů
- ? jak ověřit správnost kalibrace



Co jsou ekonomické scénáře?



Kooperativa
VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je

Co jsou ekonomické scénáře?

- ▶ projekce ekonomických veličin do budoucnosti
- ▶ příklady veličin
 - ▶ ceny bezkupónových dluhopisů různých splatností
 - ▶ sazby spotové výnosové křivky
 - ▶ akciový index
 - ▶ dividendový výnos
 - ▶ inflační index
 - ▶ diskontní faktor
- ▶ vybrané veličiny jsou modelovány jako náhodné procesy
- ▶ sada stochastických scénářů obsahuje množství realizací těchto náhodných veličin (simulací)
 - ▶ např. 1000, 5000, ...

Příklad

Simulace	Třída	Veličina	Splatnost	2013	2014	2015
1	ZCB	PRICE	1	0,99457	0,99601	0,99363
1	ZCB	PRICE	2	0,98582	0,98932	0,98262
1	ZCB	SPOT_RATE	1	0,54625	0,40113	0,64101
1	ZCB	SPOT_RATE	2	0,71672	0,53819	0,88061
1	ZCB	SPOT_RATE	3	0,75682	0,77036	1,09356
1	ZCB	SPOT_RATE	4	0,85779	1,00343	1,39448
1	ZCB	SPOT_RATE	5	0,95927	1,31838	1,60969
1	EQUITY	RET_IDX		1	1,31436	1,29601
1	EQUITY	DIVIDEND		3,95	3,65850	3,96352
1	INFLN	INFLN_IDX		1	1,03288	1,05425
1	VALN	DISCOUNT		1	0,99457	0,99600
2	ZCB	PRICE	1	0,99457	0,92877	0,92656
2	ZCB	PRICE	2	0,98582	0,92254	0,91629
2	ZCB	SPOT_RATE	1	0,54625	0,37406	0,59774
2	ZCB	SPOT_RATE	2	0,71672	0,50186	0,82117
2	ZCB	SPOT_RATE	3	0,75682	0,71836	1,01975
2	ZCB	SPOT_RATE	4	0,85779	0,93570	1,30035
2	ZCB	SPOT_RATE	5	0,95927	1,22939	1,50104



Použití ekonomických scénářů při oceňování životního pojištění

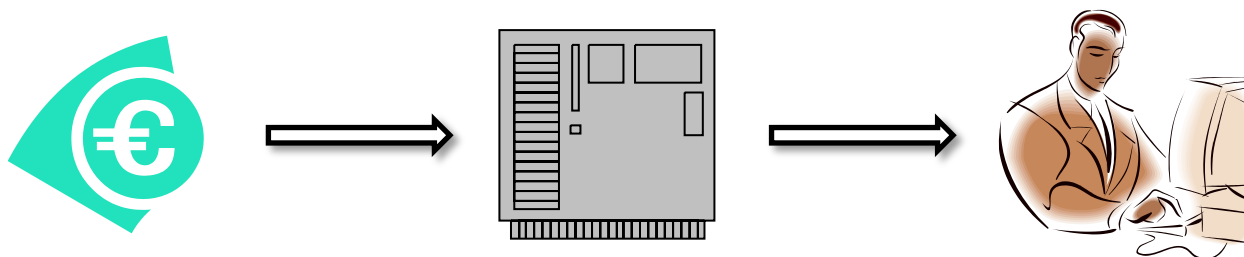


Kooperativa
VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je

Tradiční životní pojištění

- ▶ pojišťovna ukládá přijaté pojistné do rezerv, které investuje



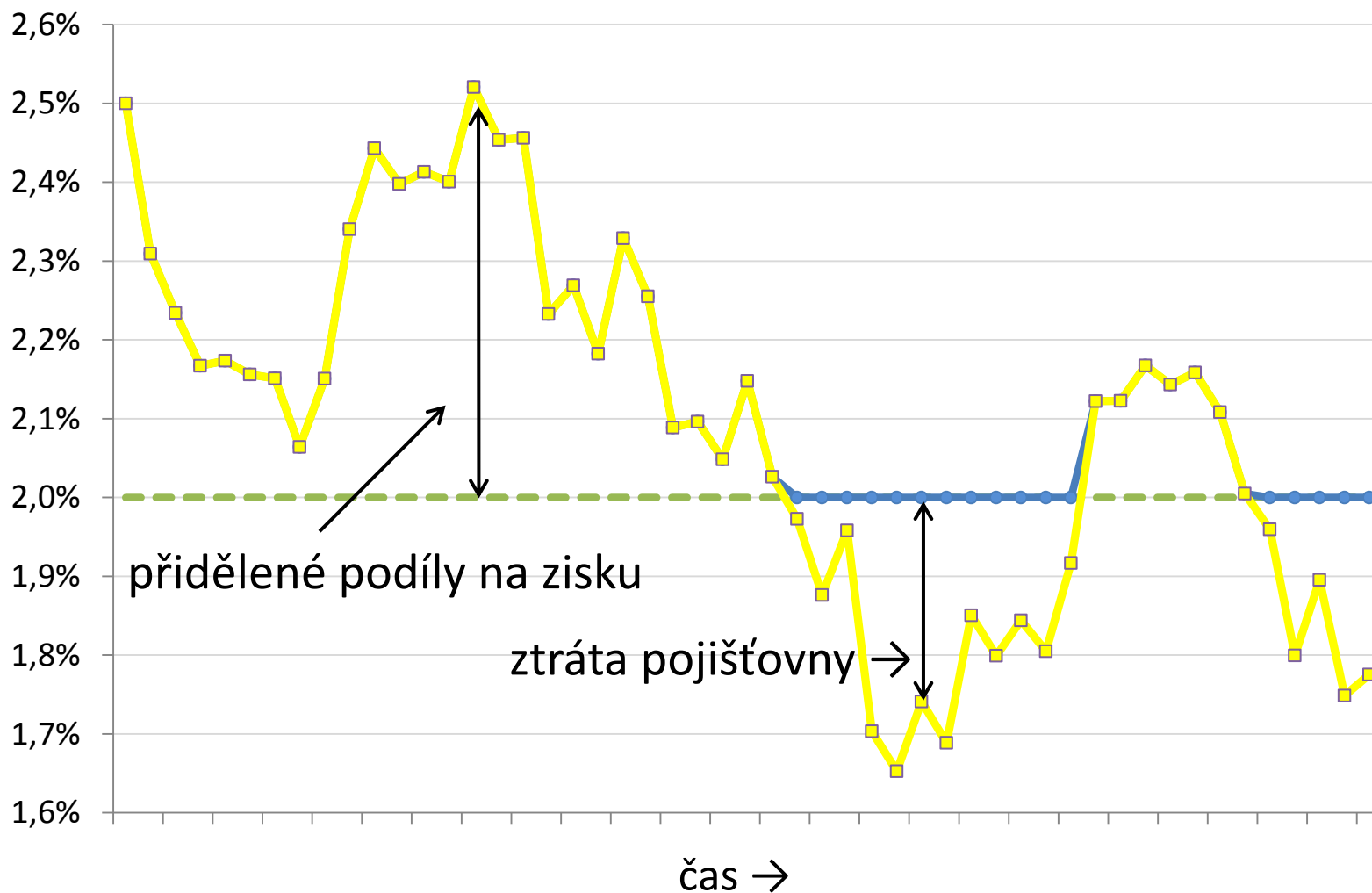
- ▶ u vytvořených rezerv garantuje roční zhodnocení

2 možné situace na konci každého roku:

1. výnos > garance → podíly na zisku pojistníkům
 - ▶ část výnosu nad garanci pojišťovna rozdělí pojistníkům
2. výnos < garance → ztrátu nese pojišťovna
 - ▶ pojišťovna dotuje garanci

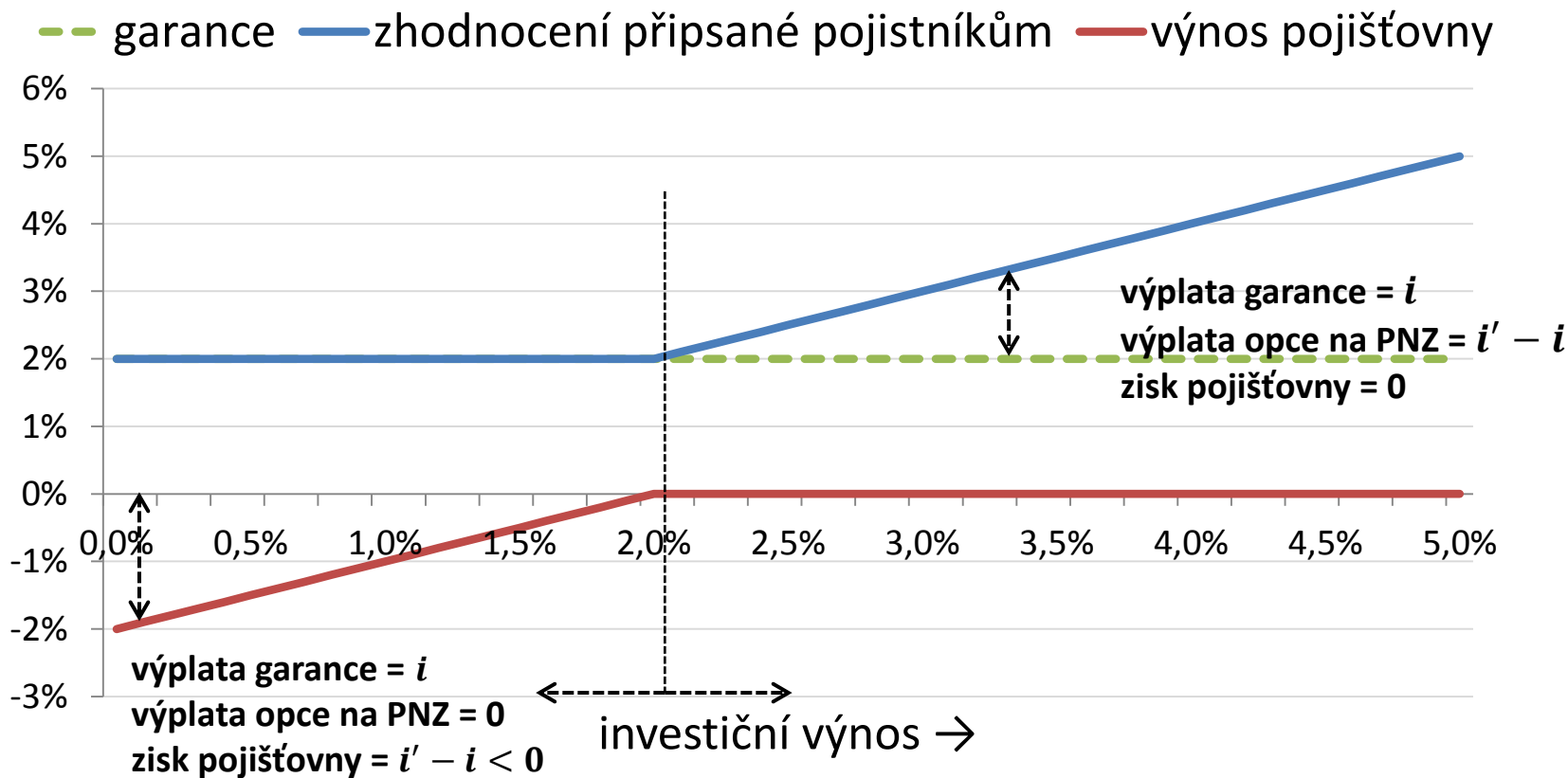
Připisování podílů na zisku

— garance —●— zhodnocení připsané pojistníkům —■— výnos



Opce a garance

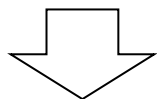
- ▶ roční garantované zhodnocení = i
- ▶ dosažené zhodnocení za uplynulý rok = i'
- ▶ připsané zhodnocení = $i + (i' - i)^+ \rightarrow$ nelinearita



Oceňování opcí a garancí

- ▶ nelineární závislost výplaty opcí a garancí na investičním výnosu
- ▶ platí Jensenova nerovnost

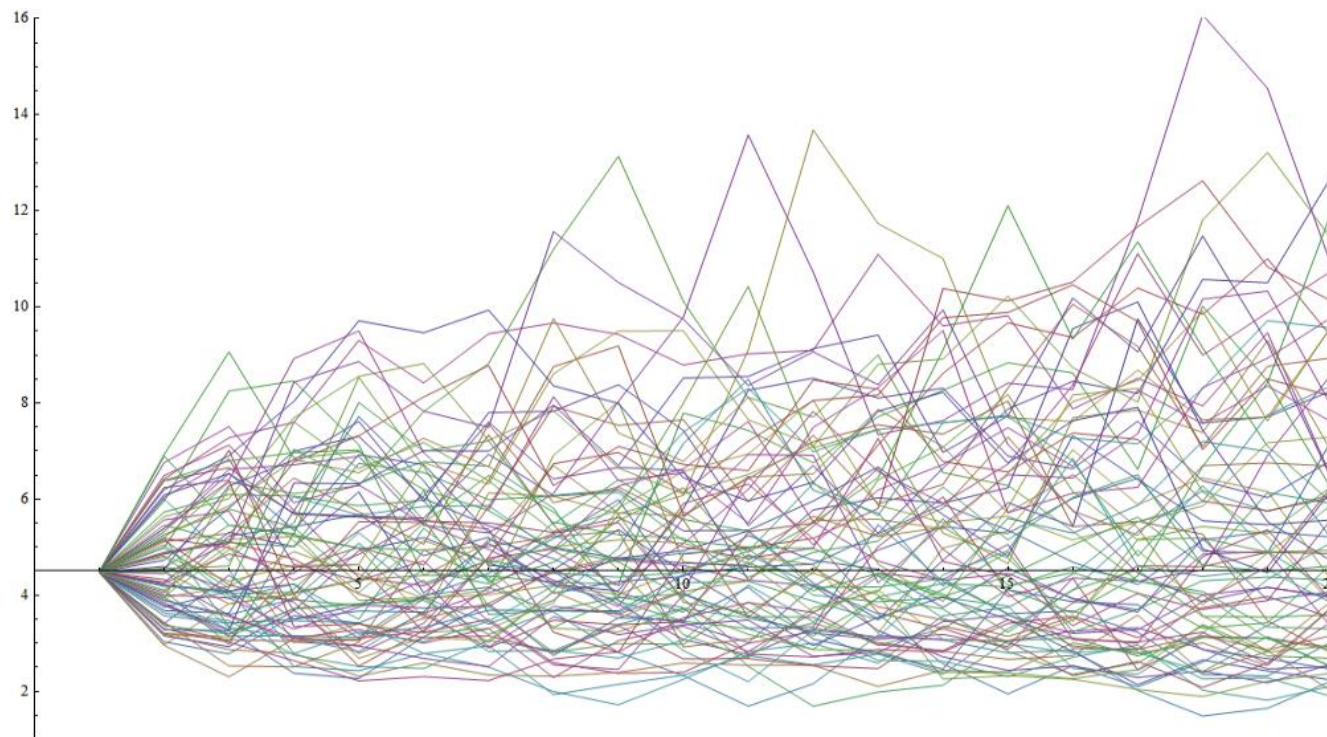
$$\underbrace{\text{PV cashflow}(E[\text{výnos}])}_{\text{zahrnuje pouze vnitřní hodnotu opcí a garancí}} \neq \underbrace{E[\text{PV cashflow}(\text{výnos})]}_{\text{zahrnuje i časovou hodnotu opcí a garancí}}$$



- ▶ deterministická výnosová křivka při projekci cashflow
 - ▶ určuje očekávané budoucí výnosy
 - ▶ odvozena z aktuálních tržních dat
 - ▶ současná hodnota cashflow za předpokladu, že se tržní situace nezmění
- pro výpočet časové hodnoty opcí a garancí (TVFOG) nutno zohlednit budoucí nejistý vývoj výnosů

Oceňování metodou Monte Carlo

- ▶ ekonomické scénáře obsahují množství simulací vývoje výnosů
 - ▶ ovlivňují investiční výnos pojišťovny → podíly na zisku
- ▶ v každé simulaci projekce CF včetně výplaty opcí a garancí
- ▶ průměr současné hodnoty CF přes simulace
- ≡ odhad střední hodnoty diskontovaných CF (včetně TVFOG)



Rizikově neutrální vs. skutečný svět

- ▶ rizikově neutrální svět (R-N) – účastníci trhu nemají averzi k riziku
 - ▶ za přijaté riziko nepožadují přírážku
 - ▶ všechna aktiva nesou bezrizikový výnos
- ▶ skutečný svět (R-W) – účastníci trhu jsou averzní k riziku
 - ▶ požadují rizikovou přírážku k RFR (tržní cena rizika)
 - ▶ výnos aktiv je různý podle obsaženého rizika
- ▶ ocenění CF střední současnou hodnotou funguje v R-N prostředí
 - ▶ jinak nefunguje (existuje arbitráž)
- ▶ projekce budoucích hodnot a jejich rozdělení fungují v R-W
- ▶ v R-W světě lze k ocenění cashflow použít deflátor

$$E^P[\text{Def}_T \cdot CF_T] = E^Q[\text{diskont}_T \cdot CF_T] = \text{současná hodnota } CF_T,$$

kde Def_T je deflátor, Q značí R-N prostředí a P značí R-W prostředí (viz *Jarvis, Southall, Varnell (2001)*)

Otázky

- ✓ co jsou ekonomické scénáře
- ✓ proč a jak se používají při oceňování toků z životního pojištění
- ? co je generátor ekonomických scénářů
- ? jak může generátor vypadat (příklad)
- ? jak vypadá kalibrace parametrů
- ? jak ověřit správnost kalibrace



Co je generátor ekonomických scénářů?



Kooperativa
VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je

Generátor ekonomických scénářů (ESG)

- ▶ soubor matematických modelů pro veličiny ve scénářích
- ▶ modely obsahují náhodnou složku (typicky Brownův pohyb)
- ▶ jednotlivé modely mohou být vzájemně provázané

Příklad generátoru (rizikově neutrální)

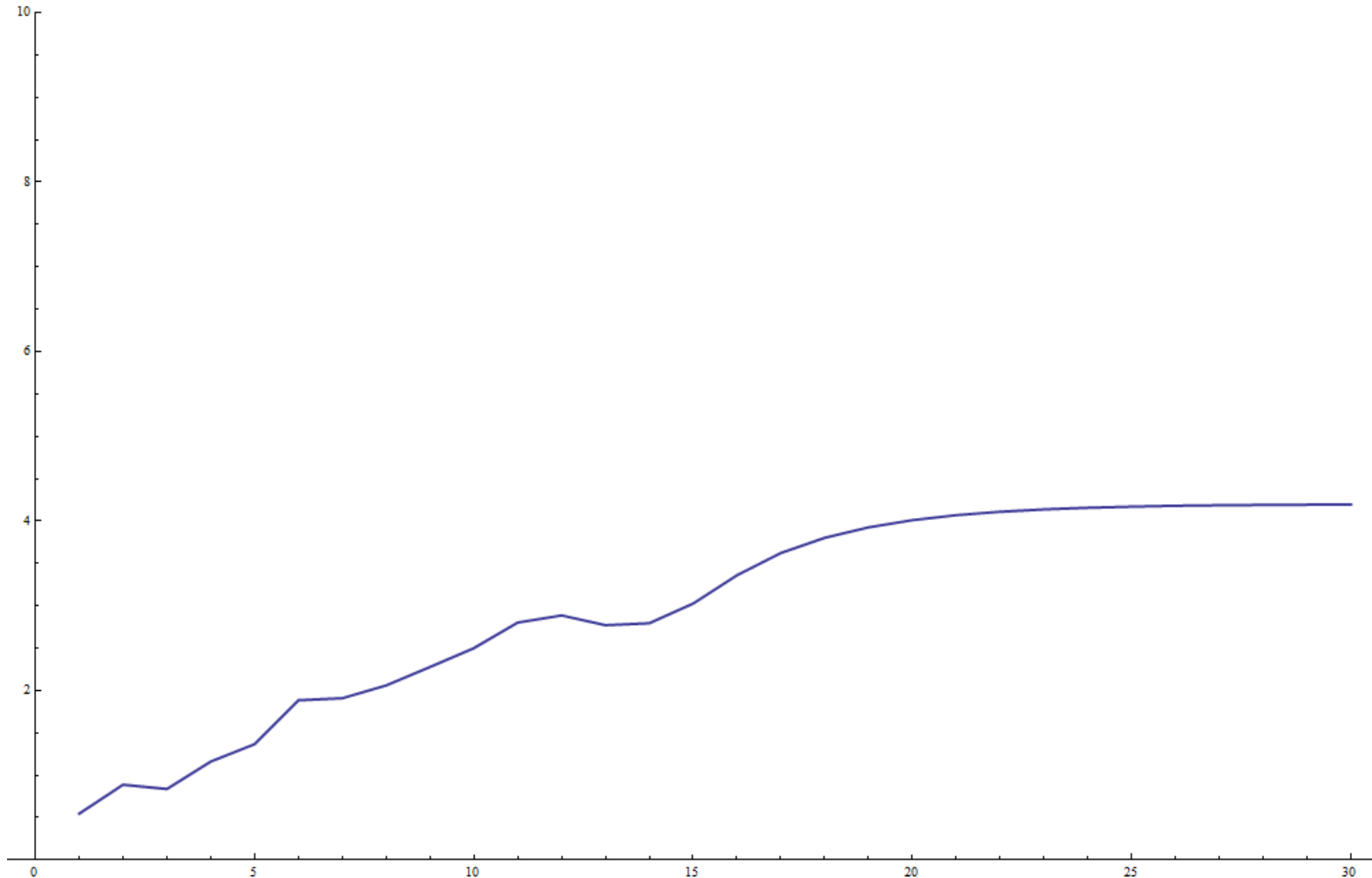
- ▶ výnosové křivky – Libor Market Model (LMM)
- ▶ reálná úroková míra – Vašíčkův model
- ▶ inflace – výpočet z reálné a nominální úrokové míry
- ▶ akcie – logaritmicko-normální model
- ▶ dividendy – logaritmický mean-reverting model

Kalibrace

- ▶ proces nastavení parametrů modelu tak, aby byly konzistentní s aktuální tržní situací

Libor Market Model (LMM)

- == Brace, Gatarek & Musiela (BGM) model
- ▶ R-N model pro celou forwardovou výnosovou křivku



Libor Market Model (LMM)

- ▶ odvození vychází z R-N modelu pro bezkupónové dluhopisy (ZCB)

$$dZ_i = rZ_i dt + Z_i \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} dW_j, \quad i = 1, \dots, N$$

Z_i = cena ZCB se splatností za i let | W_j = Brownův pohyb

- ▶ obecný model pro forwardovou sazbu

$$dF_i = \mu_i F_i dt + \sigma_i F_i dW_i \quad F_i = \text{forw. sazba v } i\text{-tém roce}$$

- ▶ ze vztahu $Z_i = (1 + F_i)Z_{i+1}$ odvozen model pro forw. sazby F_i

$$dF_i = \left(\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j F_j \rho_{ij}}{1 + F_j} \right) \sigma_i F_i dt + \sigma_i F_i dW_i, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\rho_{ij} dt = dW_i dW_j \quad \forall i, j \quad \sigma_i = -a_{i+1,i} \frac{1+F_i}{F_i}$$

Simulace LMM

- ▶ alternativní zápis modelu

$$d(\log F_i) = \left(\sigma_i \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j F_j \rho_{ij}}{1 + F_j} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) dt + \sigma_i dW_i$$

- ▶ pro diskrétní čas (roční krok)

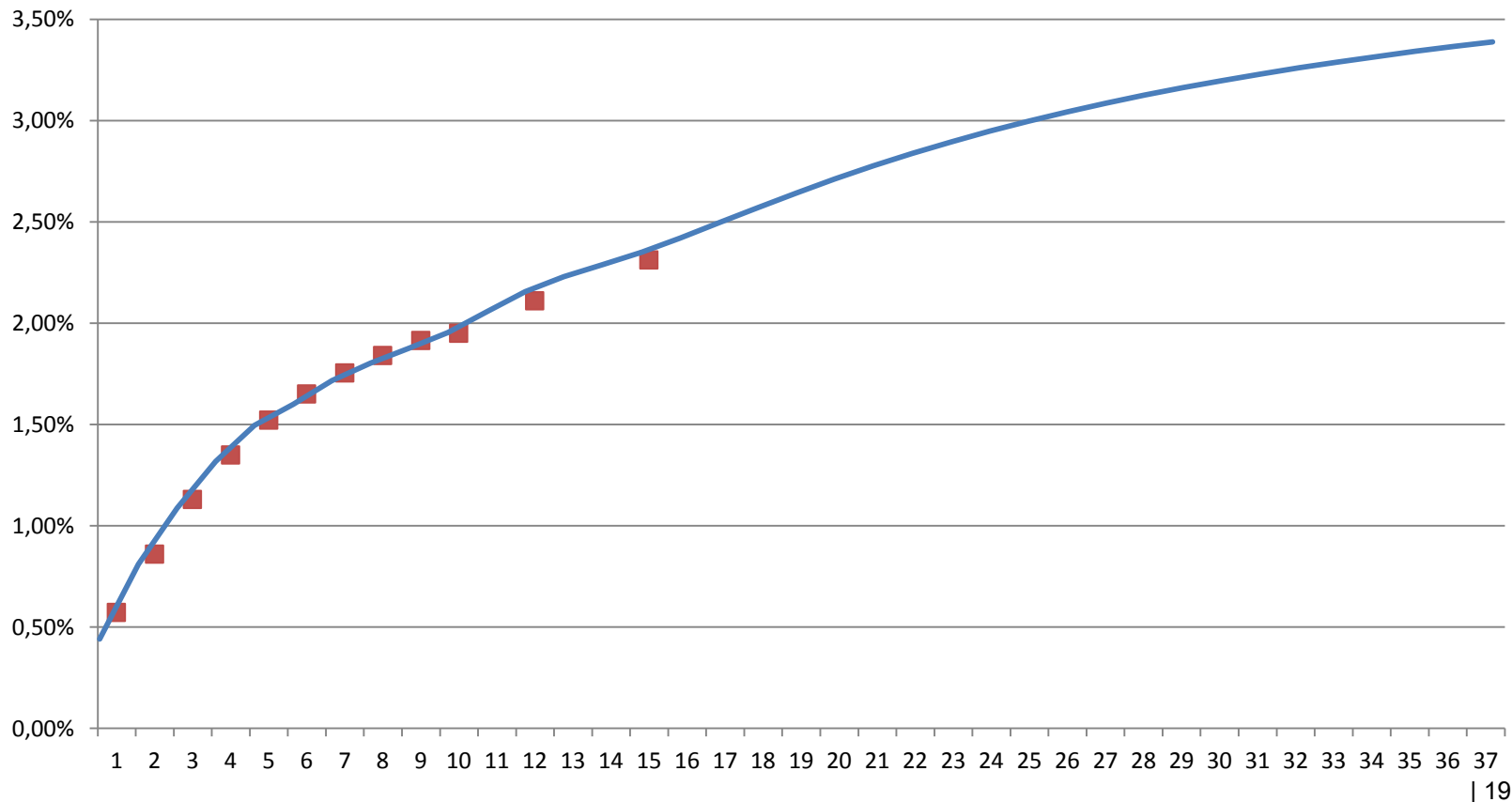
$$F_i(t+1) = F_i(t) \exp \left[\left(\sigma_i \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j F_j(t) \rho_{ij}}{1 + F_j(t)} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 \right) + \sigma_i \varepsilon_i \right], \varepsilon_i \sim N(0,1)$$

- ▶ vstupy

- ▶ počáteční forwardová výnosová křivka $F_i(0)$, $i = 1, \dots, N$
- ▶ volatility σ_i , $i = 1, \dots, N$
- ▶ korelace ρ_{ij} , $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$

Kalibrace LMM

- ▬ určení vstupních parametrů konzistentních s trhem
- ▶ počáteční forwardová křivka odvozená z tržních dat
 - ▶ Smith-Wilson, Nelson-Siegel, apod.



Kalibrace LMM – volatility, korelace

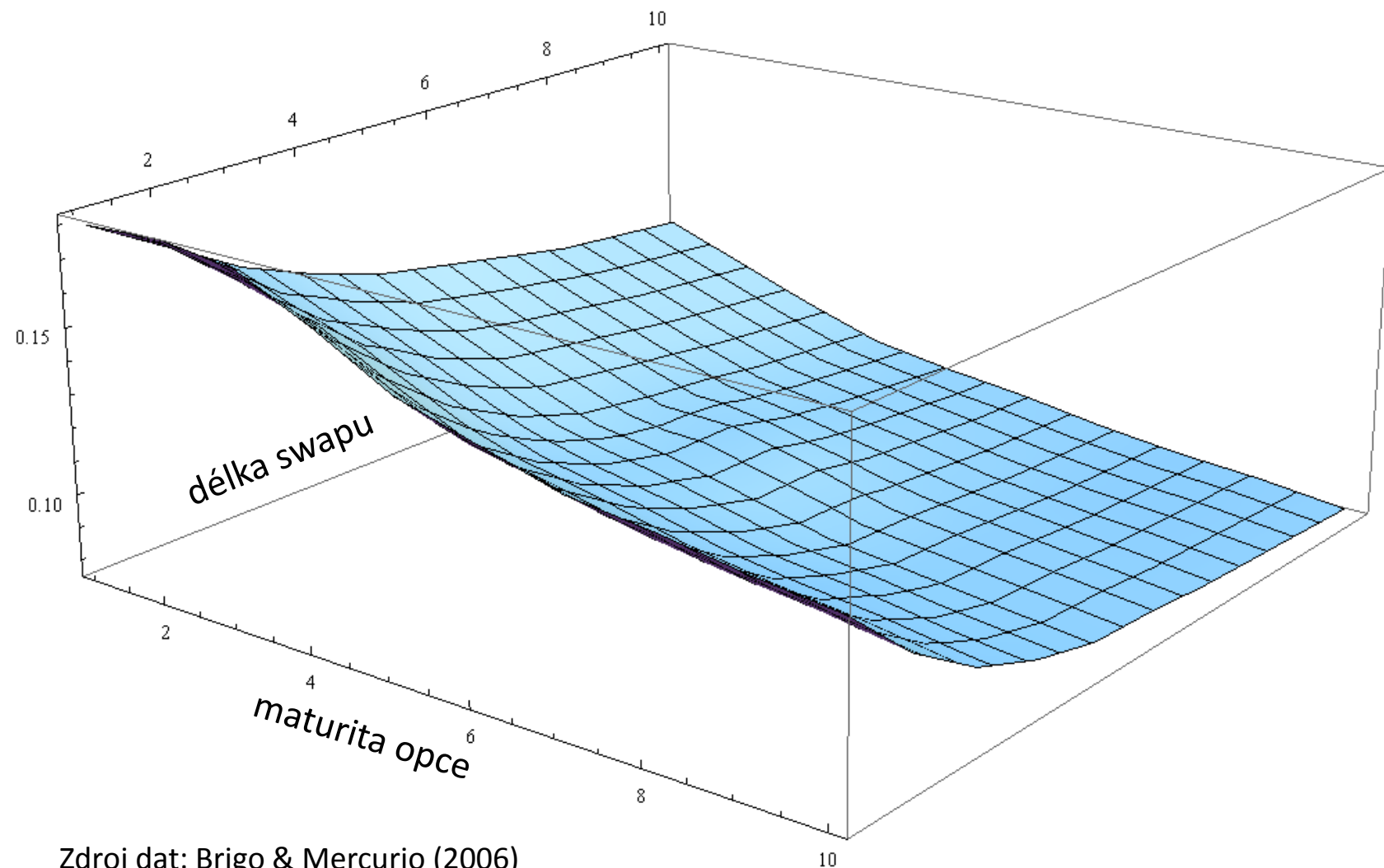
- ▶ kalibrace volatilit σ_i a korelací ρ_{ij}
 - ▶ parametrizace σ_i (např. $\sigma_i = g(i, \theta_1)$; θ_1 je vektor parametrů)
 - ▶ parametrizace ρ_{ij} (např. $\rho_{ij} = h(i, j, \theta_2)$; θ_2 je vektor parametrů)
 - ▶ vyjádření volatility swapové sazby implikované ze swapce v modelu

$$\sigma_{\text{swapce}}(n, k) = f(n, k, \theta_1, \theta_2, F_{n+1}(0), \dots, F_{n+k}(0))$$

n = expirace opce | k = délka swapu

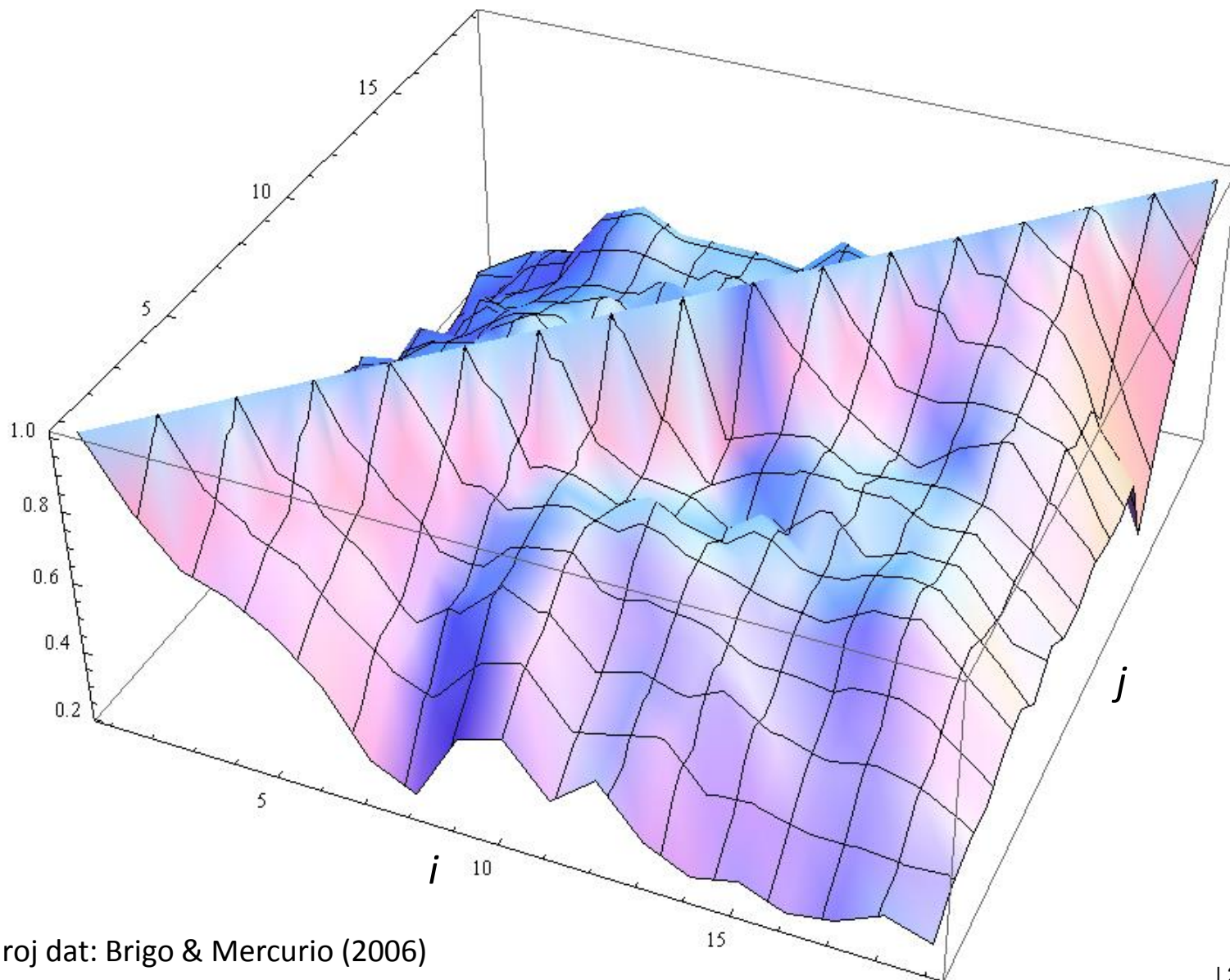
- ▶ numerický odhad θ_1, θ_2 tak, aby implikované volatility ze swapcí v modelu odpovídaly tržním implikovaným volatilitám
 - ▶ např. z obchodního systému Bloomberg
- ▶ vyjádření impl. volatility ze swapce v LMM viz *Hull & White (1999)*
- ▶ různé konkrétní parametrizace volatilit a korelací včetně příkladů popsány např. v *Brigo & Mercurio (2006)*

Kalibrace LMM – graf implikovaných volatilit



Zdroj dat: Brigo & Mercurio (2006)

Kalibrace LMM – graf korelací ρ_{ij}



Zdroj dat: Brigo & Mercurio (2006)

Diskontování

- ▶ jednoletá forwardová sazba pro rok, v němž CF nastane
- ▶ diskontování z času 1 do času 0

$$PV(0) = \frac{CF(1)}{1 + F_1(0)}$$

- ▶ diskontování z času t do času 0

$$PV(0) = \frac{CF(t)}{\prod_{i=0}^{t-1} [1 + F_1(i)]}$$

- ▶ z praktických důvodů je vhodné zavést diskontní faktor

$$D(t) := \frac{1}{\prod_{i=0}^{t-1} [1 + F_1(i)]}$$

$$PV(0) = CF(t) D(t)$$

Reálná úroková míra – Vašíčkův model

- ▶ reálná úroková míra = očištěná o inflaci
- ▶ model pro krátkodobou sazbu $r(t)$ (short-rate)

$$dr(t) = k[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$$

- ▶ k, θ, σ a $r(0)$ jsou parametry modelu
- ▶ umožňuje negativní úrokovou míru a analytické řešení $r(t)$
- ▶ cena ZCB s jednotkovou výplatou v čase T stanovená v čase t

$$ZCB(t, T) = E\left[e^{-\int_t^T r(s) ds}\right] = A(t, T, k, \theta, \sigma)e^{-B(t, T, k) r(t)}$$

- ▶ $A(t, T)$ a $B(t, T)$ jsou funkce parametrů k, θ, σ

$$A(t, T) = \exp\left\{\left(\theta - \frac{\sigma^2}{2k^2}\right)[B(t, T) - T + t] - \frac{\sigma^2}{4k}B(t, T)^2\right\}$$

$$B(t, T) = \frac{1}{k} \left[1 - e^{-k(T-t)}\right]$$

Vašíčkův model – kalibrace

- ▶ $r(0)$ z nominální výnosové křivky a inflace na příští rok

$$1 + F_1(0) = (1 + \text{inlace}(0))(1 + r(0))$$

$$r(0) = \frac{1 + F_1(0)}{1 + \text{inlace}(0)} - 1$$

- ▶ kalibrace parametrů k, θ, σ ze vzorce pro modelové ceny ZCB

$$ZCB(0, T) = A(0, T)e^{-B(0, T)r(0)} = f(T, k, \theta, \sigma, r(0))$$

- ▶ numerický odhad tak, aby modelové ceny odpovídaly tržním
- ▶ ceny ZCB mají odpovídat reálné úr. míře = inflation-linked ZCB
 - ▶ výplata jistiny v reálné výši (tj. zvýšená o inflaci)
- ▶ pro CZK se neobchodují → nelze kalibrovat přímo na trh
→ nutná aproximace (výpočet „tržních“ cen ZCB z dat o inflaci)

Inflace

- ▶ z LMM známe jednoletou nominální úr. míru $F_1(t)$
- ▶ z Vašíčkova modelu známe jednoletou reálnou úr. míru $r(t)$
 - ▶ u obou modelů předpokládáme roční krok
- ▶ inflaci pro časový interval $(t, t + 1)$ vypočteme ze vztahu

$$1 + F_1(t) = (1 + \text{inflace}(t))(1 + r(t))$$

$$\text{inflace}(t) = \frac{1 + F_1(t)}{1 + r(t)} - 1$$

Akcie – celkový výnos

- ▶ celkový výnos zahrnuje kapitálový i dividendový výnos
- ▶ ve scénářích např. ve formě akciového indexu
- ▶ model: logaritmicko-normální náhodná procházka

$$dS(t) = S(t)[\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)]$$

- ▶ v rizikově neutrálním prostředí $\mu(t) = F_1(t)$
- ▶ $\sigma(t)$ je předmětem kalibrace

Příklad kalibrace $\sigma(t)$

- ▶ předpokládáme $\sigma(t) = \sigma$
- ▶ položíme σ = implikovaná volatilita akcie z opce na trhu
- ▶ opci volíme s co nejdelší maturitou
- ▶ podkladové aktivum opce volíme s ohledem na portfolio aktiv pojišťovny

Dividendový výnos akcií

- ▶ model pro logaritmus dividendového výnosu $y(t)$

$$d \log y(t) = \alpha[\mu - \log y(t)]dt + \sigma dW(t)$$

- ▶ α je rychlost návratu procesu k dlouhodobému průměru μ
- ▶ diskrétní varianta

$$\Delta \log y(t) = \alpha[\mu - \log y(t - 1)] + \sigma \varepsilon, \varepsilon \sim N(0,1)$$

Příklad kalibrace

- ▶ σ stejné jako u akcií nebo odhad z historie
- ▶ vyjádření očekávané změny $\log y(t)$ regresní rovnicí

$$E[\Delta \log y(t) | \log y(t - 1)] = \alpha\mu - \alpha \log y(t - 1)$$

- ▶ odhad $\hat{\alpha}$ a $\hat{\alpha}\hat{\mu}$ z historických dat, dopočet $\hat{\mu} = \hat{\alpha}\hat{\mu}/\hat{\alpha}$

Akcie – kapitálový výnos

- ▶ kapitálový výnos = výnos z růstu ceny aktiva
- ▶ vztah mezi celkovým, dividendovým a kapitálovým výnosem

$$1 + R_{celkem} = (1 + R_{dividendy})(1 + R_{kapitál})$$

$$R_{celkem} = \frac{\Delta S(t)}{S(t)} \text{ ... z modelu pro celkový výnos}$$

$$R_{dividendy} = y(t) \text{ ... z modelu pro dividendový výnos}$$

- ▶ růst ceny akcií $P(t)$

$$P(t + 1) = P(t)(1 + R_{kapitál})$$

Otázky

- ✓ co jsou ekonomické scénáře
- ✓ proč a jak se používají při oceňování toků z životního pojištění
- ✓ co je generátor ekonomických scénářů
- ✓ jak může generátor vypadat (příklad)
- ✓ jak vypadá kalibrace parametrů
- ? jak ověřit správnost kalibrace



Validace ekonomických scénářů

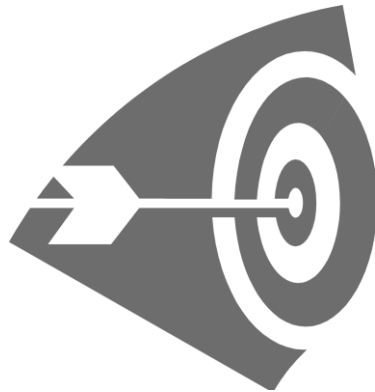


Kooperativa
VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je

Validace

- = ověření splnění kalibračních cílů a předpokladů
- ▶ nejedná se o posouzení vhodnosti použitých modelů
- ▶ vstupem jsou scénáře vytvořené pomocí ESG
- ▶ princip – vypočítat ze scénářů ekvivalent kalibračních cílů a srovnat ho s kalibračními cíli



Validace – tržní konzistence, 1=1 test

- ▶ R-N prostředí: výnosy aktiv neobsahují rizikovou přírážku
- ▶ střední diskontovaná hodnota portfolia aktiv při libovolné investiční strategii je konstantní

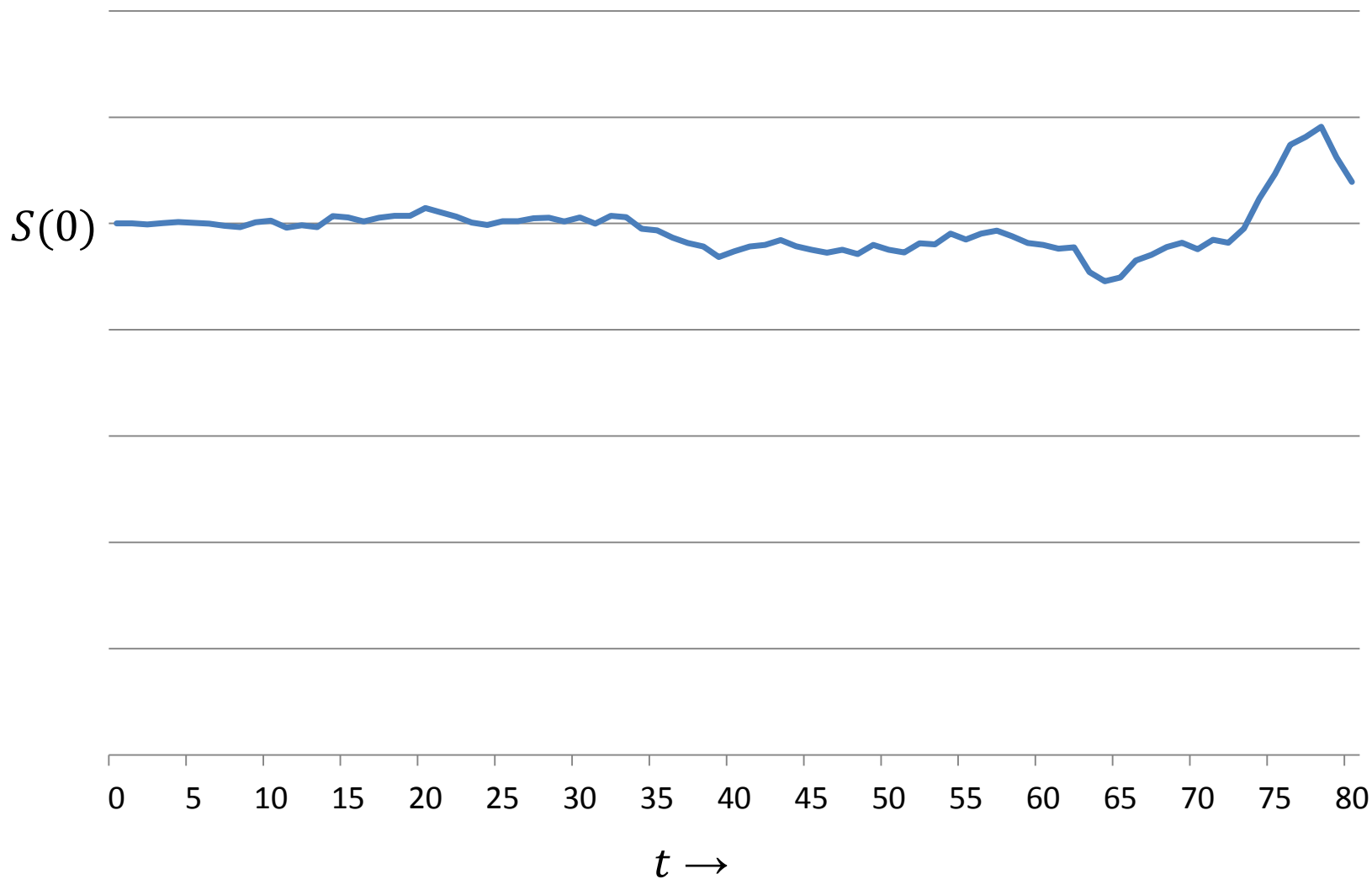
Příklad – akciový index

- ▶ $S(t, i)$ – index celkového výnosu akcií (t = čas, i = simulace)
- ▶ $S(0, i) = S(0)$
- ▶ odhad střední diskontované hodnoty akcií v čase t průměrem

$$S(0) = E[D(t)S(t)] \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D(t, i) S(t, i) \quad \forall t$$

- ▶ přesná rovnost neplatí z důvodu nedokonalého náhodného výběru (chyba vzorku)
 - ▶ omezený počet simulací

Validace – tržní konzistence



Validate – diskont

- ▶ hodnota jisté 1 Kč v čase t odpovídá ceně $ZCB(0, t)$
- ▶ jiný způsob ocenění – střední hodnota diskontovaných toků

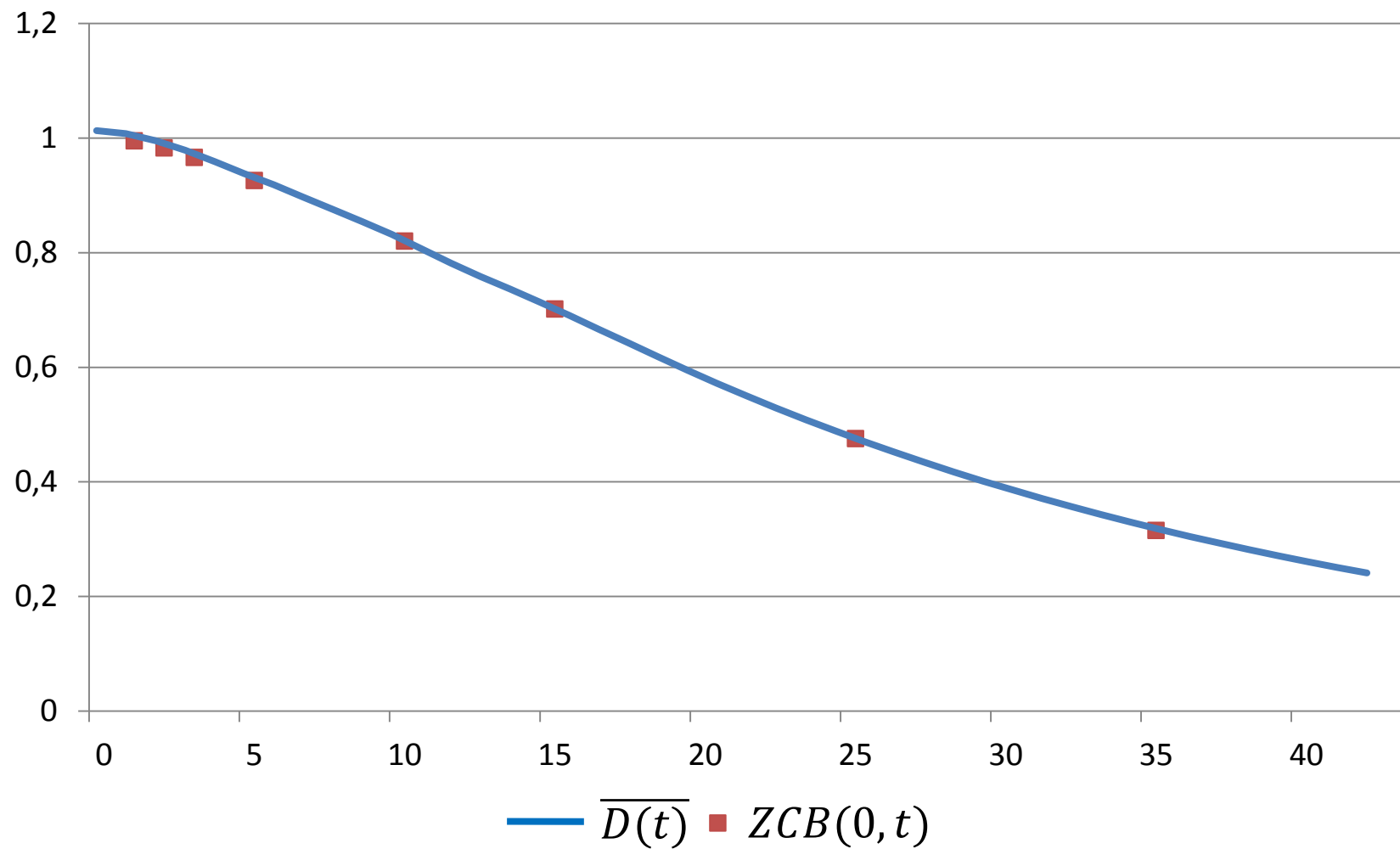
$$E[D(t) \cdot 1]$$

$$\Rightarrow ZCB(0, t) = E[D(t)]$$

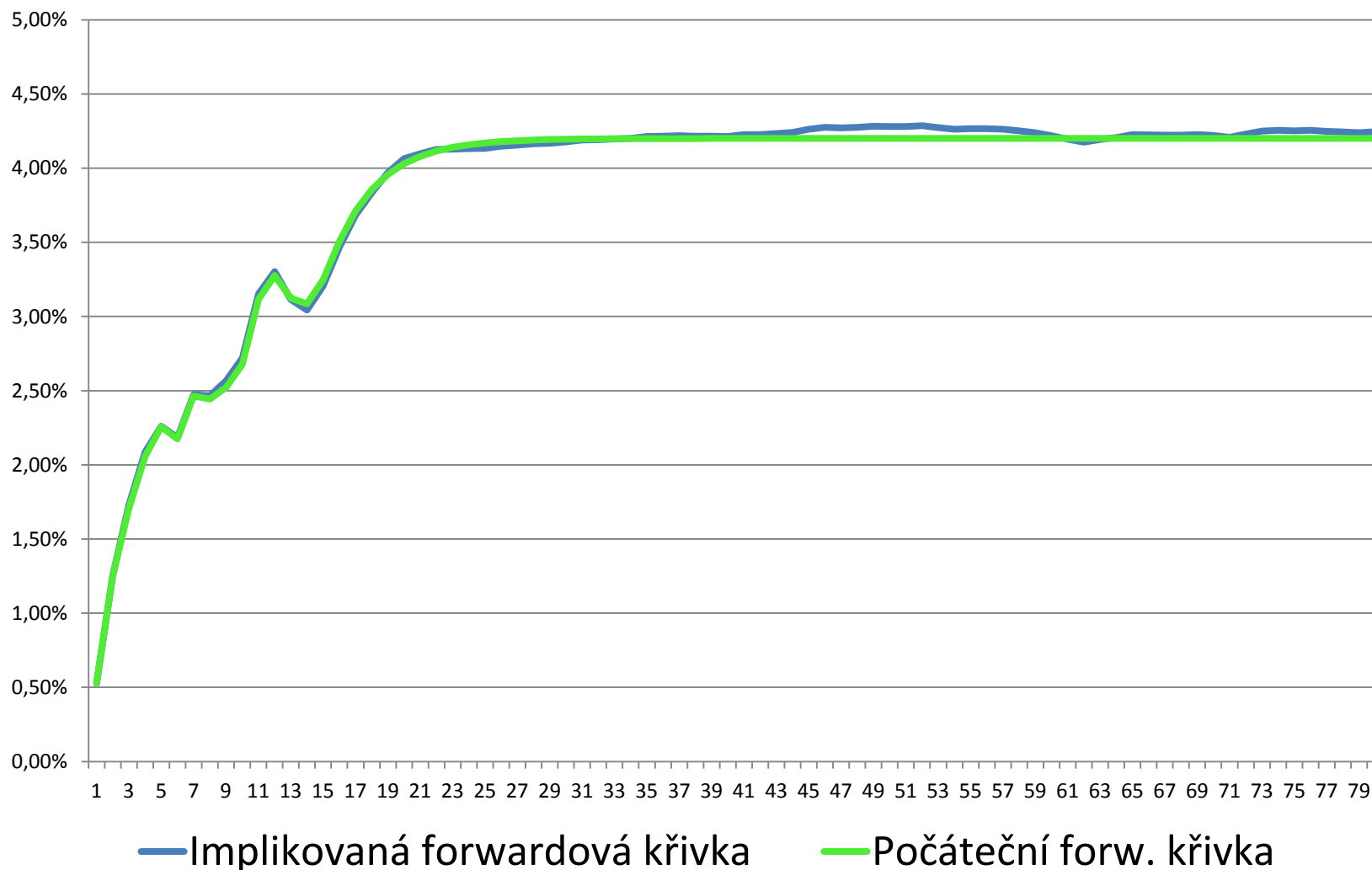
- ▶ odhad střední hodnoty průměrem přes N simulací

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D(t, i) \cong ZCB(0, t)$$

Validace – diskont



Validace – diskont



Validace – inflace

- ▶ inflation-linked ZCB použité ke kalibraci Vašíčkova modelu

$$ZCB_{IL}(0, t)$$

- ▶ reálný diskontní faktor

$$RD(t) := \frac{1}{[1 + r(1)] \dots [1 + r(t)]}$$

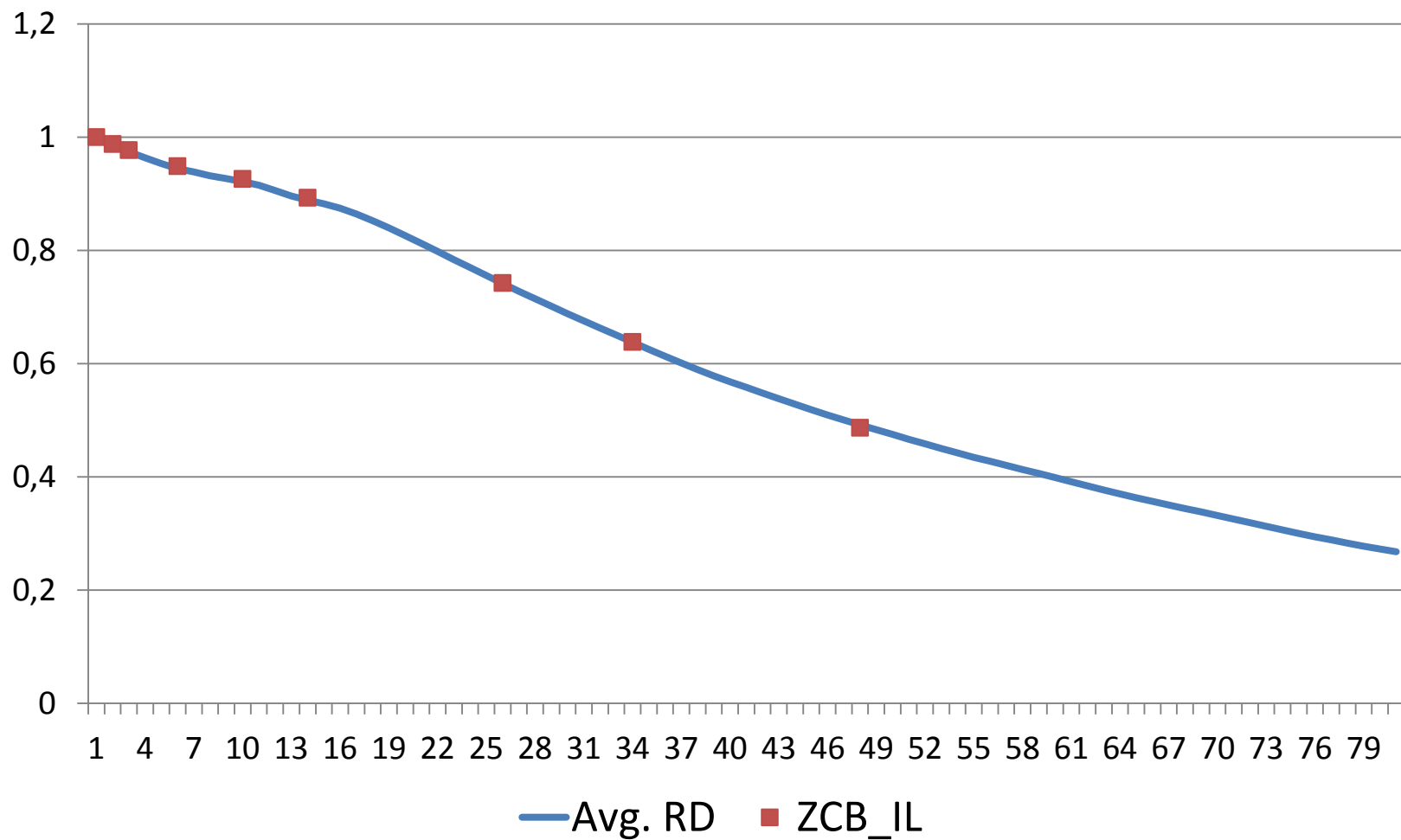
- ▶ podobně jako u nominální úrokové míry platí

$$E[RD(t)] = ZCB_{IL}(0, t)$$

- ▶ odhad střední hodnoty průměrem a srovnání

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N RD(t, i) \cong ZCB_{IL}(0, t)$$

Validace – inflace



- ▶ princip validace
 1. odhad aktuální ceny swapce ze scénářů
 - ▶ střední současná hodnota výplat swapce
 2. vzorec pro cenu swapce (funkce volatility swapové sazby)
 3. výpočet implikované volatility ze scénářů
 - ▶ cena swapce ze vzorce odpovídá odhadnuté ceně ze scénářů
 4. srovnání implikované volatility s kalibračním cílem
 - ▶ kalibrační cíl byl vypočten stejným způsobem z tržních cen swapcí

swapce s expirací v čase s na swap délky t

opravňuje držitele v čase s uzavřít úrokový swap s platbami v časech $s + 1, \dots, s + t$ s předem sjednanou fixní úrokovou sazbou $i(s, t)$

- ▶ cena swapce(s, t)

$$E[\text{PV výplaty swapce}] = E[D(s) \cdot [\text{hodnota swapu}(t) \text{ v čase } s]^+]$$

- ▶ odhad ceny swapce ze scénářů (N simulací)

$$\widehat{\text{Swapce}}(s, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D(s, i) \cdot [\text{hodnota swapu}(t, i) \text{ v čase } s]^+$$

- ? výpočet hodnoty swapu

- ▶ držitel swapu je příjemcem fixních a plátcem plovoucích plateb
 - ▶ tzv. receiver swap
- ▶ hodnota fixní části v čase expirace swapce s

$$PV_{fix}(s, t) = i(s, t) \sum_{j=1}^t ZCB(s, j)$$

- ▶ náklady na plovoucí část k času s

$$-PV_{float}(s, t) = -1 + 1 \cdot ZCB(s, t)$$

- ▶ hodnota swapu v okamžiku expirace swapce (čas s)

$$PV_{fix}(s, t) - PV_{float}(s, t)$$

- ? jak stanovit $i(s, t)$

- ▶ $i(s, t)$ stanovíme z počáteční výnosové křivky tak, aby hodnota swapu vztažená k času 0 byla 0
 - ▶ swapce je pak tzv. forward at-the-money

$$PV_{fix}^0(s, t) = PV_{float}^0(s, t)$$

- ▶ hodnota plovoucí a fixní části k času 0

$$PV_{fix}^0(s, t) = i(s, t) \sum_{j=1}^t ZCB(0, s + j)$$

$$PV_{float}^0(s, t) = ZCB(0, s) - ZCB(0, s + t)$$

- ▶ tedy

$$i(s, t) = \frac{ZCB(0, s) - ZCB(0, s + t)}{\sum_{j=1}^t ZCB(0, s + j)}$$

- ▶ swapová sazba pro forward at-the-money swapci(s,t)

- ▶ Blackův vzorec pro swapci (forward at-the-money)

$$\text{Swapce}(s, t, \sigma) = [ZCB(0, s) - ZCB(0, s + t)] \left[2N\left(\frac{\sigma\sqrt{s}}{2}\right) - 1 \right]$$

N ... distr. fce. N(0,1)

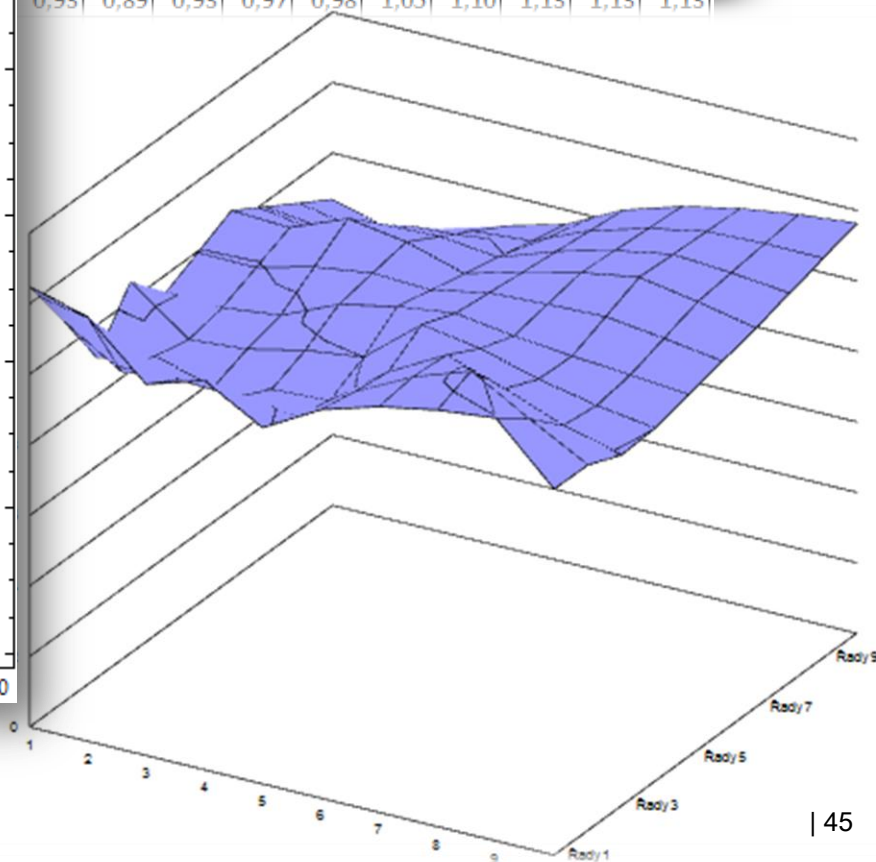
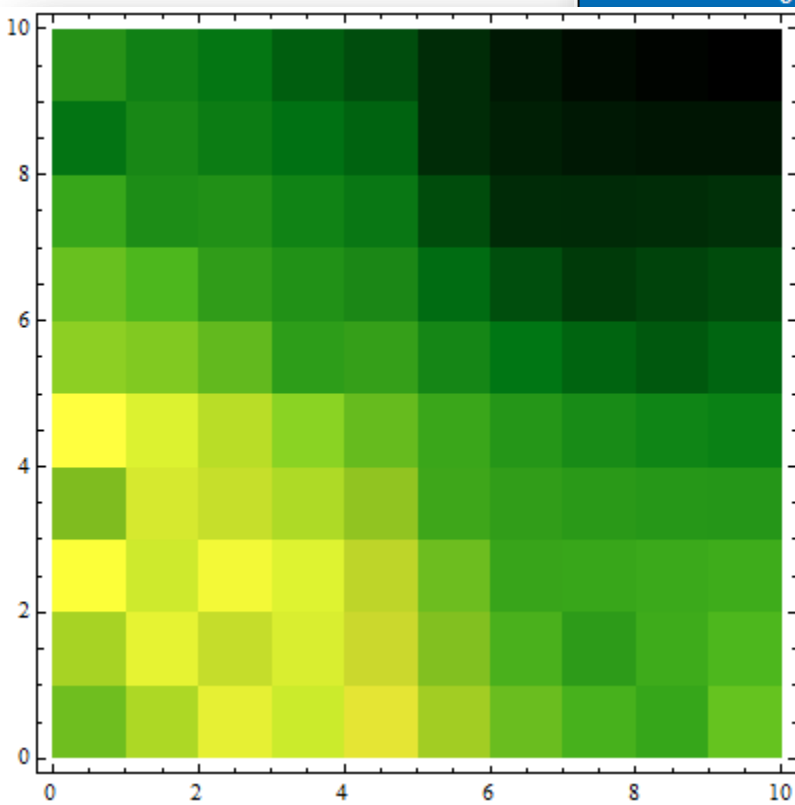
- ▶ výpočet implikované volatility z cen swapcí ze scénářů

$$\sigma_{impl}(s, t) = \arg \min_{\sigma} [(\text{Swapce}(s, t, \sigma) - \widehat{\text{Swapce}}(s, t))^2]$$

- ▶ srovnání na kalibrační cíle (= implikované volatility z tržních cen)
 - ▶ např. tabulka podílů implikovaných volatilit a kalibračních cílů

Validace – volatility úrokových měr

Option/Swap term	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,25	1,20	1,05	1,10	1,01	1,10	1,15	1,18	1,20	1,04
2	1,08	0,98	0,99	0,99	0,97	1,08	1,16	1,22	1,13	1,04
3	0,91	0,95	0,90	0,94	0,95	1,07	1,16	1,10	1,04	0,99
4	1,05	0,93	0,94	0,98	1,00	1,13	1,11	1,06	1,02	1,00
5	0,95	0,95	0,97	1,04	1,07	1,09	1,07	1,05	1,04	1,03
6	1,00	0,99	1,04	1,06	1,05	1,08	1,09	1,10	1,08	1,05
7	1,05	1,04	1,10	1,08	1,03	1,07	1,11	1,14	1,11	1,07
8	0,99	0,97	1,02	1,02	1,00	1,06	1,10	1,13	1,12	1,10
9	0,93	0,89	0,93	0,97	0,98	1,05	1,10	1,13	1,13	1,13



Validace – volatilita akcií

- ▶ stejný princip jako volatility swapcí
 1. výpočet ceny opce ze scénářů
 2. vyjádření ceny opce jako funkce volatility akcií
 - ▶ Black-Scholesův vzorec
 3. výpočet implikované volatility akcií z ceny opce scénářů
 4. srovnání implikované volatility akcií ze scénářů s kalibračním cílem
- ▶ odhad hodnoty evropské call opce

$$\widehat{Opce}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D(t, i) \cdot [P(t, i) - K(t)]^+$$

- ? stanovení realizační ceny $K(t)$

Validace – volatilita akcií

- ▶ cenu $K(t)$ stanovíme v čase 0 jako očekávanou cenu akcie v čase t

$$K(t) = \frac{E[D(t)P(t)]}{E[D(t)]} \cong \frac{\sum_{i=1}^N D(t,i)P(t,i)}{\sum_{i=1}^N D(t,i)}$$

- ▶ interpretace: souč. hodnota ceny akcie v čase t , vztažená k času t
- ▶ $K(t)$ splňuje definici forward at-the-money opce

$$E[D(t)[P(t) - K(t)]] = 0$$

- ▶ teoretická cena opce (forward ATM) – Black-Scholes

$$\text{Opce}(t, \sigma) = K(t) \cdot ZCB(0, t) \cdot \left[2N\left(\frac{\sigma\sqrt{t}}{2}\right) - 1 \right]$$

- ▶ implikovaná volatilita akcií

$$\sigma_{impl}(t) = \arg \min_{\sigma} [(\text{Opce}(t, \sigma) - \widehat{\text{Opce}}(t))^2]$$

- srovnání hodnoty na kalibrační cíl (= tržní impl. volatilita)

Shrnutí

- ▶ opce a garance způsobují nelinearitu CF na výnosech
 - ▶ Jensenova nerovnost → časová hodnota opcí a garancí
- ▶ ek. scénáře používáme k oceňování časové hodnoty opcí a garancí
- ▶ obsahují simulace stochastických modelů z generátoru ek. scénářů
- ▶ cashflow se oceňují střední současnou hodnotou toků v rizikově neutrálním prostředí
 - ▶ případně převod deflátorem z real-world prostředí
- ▶ náhodná složka většinou normálně rozdělená
- ▶ generátor ekonomických scénářů
 - ▶ soubor modelů potřebných ekonomických veličin
 - ▶ kalibruje se pomocí tržních dat (příp. historických)
 - ▶ validace výsledných scénářů – hodnoty ze scénářů odpovídají kalibračním cílům

Literatura

- ▶ Wilmott, P.: Paul Wilmott On Quantitative Finance, John Wiley & Sons, 2006
- ▶ Brigo, D., Mercurio, F.: Interest Rate Models – Theory and Practice, Springer, 2006
- ▶ Hull, J.: Options, Futures and Other Derivatives, Prentice-Hall, 1997
- ▶ Jarvis, S., Southall, F., Varnell, E.: Modern Valuation Techniques, The Staple Inn Actuarial Society, 2001
- ▶ Hull, J., White, A.: Forward rate volatilities, swap rate volatilities and the implementation of the Libor Market Model, 1999

Veselé Vánoce!

martin.jusko@vig.cz




Kooperativa
VIENNA INSURANCE GROUP

Pro život jaký je