Tržně konzistentní oceňovací metody v životním pojištění

Tomáš Petr

Seminář z aktuárských věd
Matematicko-fyzikální fakulta
4.4.2008

podle: International Summer School 2007, Lausanne

Obsah

Obsah

Plán přednášky

K určování potřebné výše rezerv v životním pojištění se obvykle užívají tradiční aktuárské metody a rezerva je spočítána na základě deterministických pojistně-technických předpokladů.

V přednášce se podíváme se na možnosti, jak tento přístup spojit s tržně konsistentními oceňovacími metodami, běžnými ve finančnictví.

Pojištění vs. finance

- Tradiční přístup v pojištění:
  známe pojistně-technické předpoklady, potřebná rezerva je současná střední hodnota peněžních toků, spočítaná na základě těchto předpokladů.
- Tržně konzistentní přístup:
  umíme-li peněžní tok kopírovat portfoliem složeným z tržních aktiv, pak současná střední hodnota tohoto peněžního toku se musí rovnat současné ceně tohoto portfolia.

Pojištění vs. finance

- Tradiční přístup v pojištění:
  známe pojistně-technické předpoklady, potřebná rezerva je současná střední hodnota peněžních toků, spočítaná na základě těchto předpokladů.
- Tržně konzistentní přístup:
  umíme-li peněžní tok kopírovat portfoliem složeným z tržních aktiv, pak současná střední hodnota tohoto peněžního toku se musí rovnat současné ceně tohoto portfolia.

Obsah

Podklady I. řádu

Klasický model životního pojištění: technická rezerva spočítaná na základě podkladů prvního řádu - ty zahrnují zejména

- úmrtnost,
- technickou úrokovou míru.

Tyto podklady jsou konstantní po celou dobu trvání smlouvy.

Dekrementy

Dvoustavový model:

živý $\xrightarrow{\mu}$ mrtvý

Označíme-li:

- $l(t)$ počet přežívajících v čase t,
- $m(t)$ počet zemřelých do času t,
- $\mu(t)$ úmrtnostní míra, z níž vyplývají $l(t)$, $m(t)$,
- b^d výplata při smrti,
- b^T výplata při dožití,
- π pojistné (či důchod, při opačném znaménku),
- $t = T$ čas konce pojištění;

pak v čase t probíhají platby

$$dB(t) = b^d dm(t) + b^T l(t)\chi_{\{T\}}(t) - \pi l(t)dt\,.$$

Technická rezerva

Budeme-li podklady prvního řádu značit pomocí *, pak technická rezerva životního pojištění je

$$\begin{aligned} V^*(t) &= \mathrm{E}_t^* \int_t^T e^{-\int_t^s r^*} dB(s) \\ &= \int_t^T e^{-\int_t^s r^* + \mu^*} \left(\mu^*(s) b^d - \pi\right) ds + e^{-\int_t^T r^* + \mu^*} b^T \\ &= A^1_{x+t\,\overline{n-t}|}\, b^d - \ddot{a}_{x+t\,\overline{n-t}|}\, \pi + A_{x+t\,\overset{1}{\overline{n-t}|}}\, b^T \,. \end{aligned}$$

Aneb: Thieleho diferenciální rovnicí

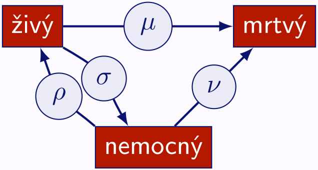
$$\frac{d}{dt} V^*(t) = r^* V^*(t) + \pi - \mu^*(t) \left(b^d - V^*(t)\right)$$

$$V^*(T-) = b^T$$

$$V^*(0+) = \pi(0)$$

Dekrementy

Příklad vícestavového modelu:



- $Z(t) = j$ stav modelu v čase t je j
- $l^j(t)$ počet přežívajících v čase t a stavu j,
- $dm^j(t)$ počet příchozích do stavu j v čase t,
- b^{jk} platby při přechodu $j \to k$,
- b^j intenzita plateb (či pojistné) během stavu j,
- $b^{j,T}$ platba při konci pojištění,

$$dB(t) = b^{Z(t-)k} dm^k(t) + b^{Z(t),T} l^{Z(t)}(t) \chi_{\{T\}}(t) + b^{Z(t)}(t) l^j(t) dt\,.$$

Technická rezerva - s podíly na zisku

Je-li $\delta(t)$ podíl na zisku, který je pojistníkovi připsán k rezervě v čase t, pak technická rezerva je určena vztahy

$$\frac{d}{dt}V^*(t) = r^*V^*(t) + \pi - \mu^*(t)\left(b^d - V^*(t)\right) + \delta(t)$$

$$V^*(0+) = \pi(0)$$

Vyplácení podílů na zisku

Například:

- Zvyšování rezervy $\Rightarrow$ zvýšení konečné výplaty $b^T = V^*(T-)$.
- Zvyšování výplaty při smrti $b^d(t)$.
- Slevy na pojistném $\pi(t)$.

Ve všech případech se vlastně invertuje vzorec pro výpočet $V^*(t)$ – ze známé rezervy (po připsání bonusu) dopočítáme upravené b^T, b^d či π.

Hledisko pojišťovny

Hodnota technické rezervy nevyjadřuje plně vliv dané pojistné smlouvy na pojišťovnu – lze srovnat s alokovaným kapitálem od počátku pojištění, vč. alokovaných bonusů:

$$\frac{d}{dt}U(t) = r(t)U(t) + \pi(t) - \mu(t)\left(b^d(t) - U(t)\right)$$

$$U(0+) = \pi(0)$$

Označení $U(t)$ zde používáme pro retrospektivní pohled - počítáme-li např. s $r(s)$, $\mu(s)$, pak tyto hodnoty jsou v čase $t \geq s$ již známy. Naopak $U(s)$, $s > t$ je pro nás neznámá náhodná veličina (na kterou nelze uvedenou rovnici aplikovat mechanicky).

Hledisko pojišťovny

Hodnota technické rezervy nevyjadřuje plně vliv dané pojistné smlouvy na pojišťovnu – lze srovnat s alokovaným kapitálem od počátku pojištění, vč. alokovaných bonusů:

$$\frac{d}{dt}U(t) = r(t)U(t) + \pi(t) - \mu(t)\left(b^d(t) - U(t)\right)$$

$$U(0+) = \pi(0)$$

Poznámka: pro solventnost nutné

$$U(t) > V^*(t)\,.$$

Rozdíl $U - V^*$ může být základem pro zisk, nebo pro příští podíly na zisku.

Obsah

Hodnota garantovaných plateb

Otázka:

Co by pojišťovna musela zaplatit třetí straně, aby tato převzala závazek pojišťovny?

I když se zaměříme jen na nejlepší odhad pojistného závazku (neuvažujeme případné rizikové, servisní ani jiné přirážky), musí tato hodnota zohlednit:

- současnou hodnotu (v čase t) nyní garantovaných plateb $V^{g(t)}(t)$:

$$\frac{d}{d\tau} V^{g(t)}(\tau) = r_t(\tau) V^{g(t)}(\tau) + \pi_t(\tau) - \mu_t(\tau) \left(b_t^d - V^{g(t)}(\tau) \right) ,$$

$$V(T-) = b_t^T ,$$

kde r_t, μ_t jsou současné odhady (počítáme prospektivně, $\tau > t$) a π_t, b_t^d, b_t^T zahrnují již nyní (v t) alokované podíly na výnosech.

Hodnota garantovaných plateb

Otázka:

Co by pojišťovna musela zaplatit třetí straně, aby tato převzala závazek pojišťovny?

I když se zaměříme jen na nejlepší odhad pojistného závazku (neuvažujeme případné rizikové, servisní ani jiné přirážky), musí tato hodnota zohlednit:

- výplatu v případě, že se pojistník rozhodne odejít (předpokládáme, že odstupné je s-násobek technické rezervy, pro $s \leq 1$):

$$V^s(t) = sV^*(t)$$

Hodnota garantovaných plateb

Otázka:

Co by pojišťovna musela zaplatit třetí straně, aby tato převzala závazek pojišťovny?

I když se zaměříme jen na nejlepší odhad pojistného závazku (neuvažujeme případné rizikové, servisní ani jiné přirážky), musí tato hodnota zohlednit:

- hodnotu v případě, pokud pojistník od času t^f neplatí pojistné:

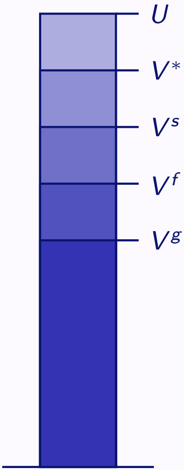
$$V^f(t) = \frac{V^*(t^f)}{V^{*+}(t^f)} V^{g(t)+}(t)\,,$$

kde $V^{*+}(t^f)$ a $V^{g(t)+}(t)$ jsou technická rezerva a současná hodnota garantovaných plateb spočítané za předpokladu, že pojistné je 0 od času t^f (zde nepředpokládáme žádnou penalizaci pojistníka).

Přehled značení

- $V_t^* \sim \mu^*, r^*, g(t) \ldots$ technická rezerva
- $V_t^g \sim \mu_t, r_t, g(t) \ldots$ garantovaná rezerva
- $U_t \sim \mu, r, g(\cdot) \ldots$ nahromaděný kapitál
- $V_t^f \sim \mu_t, r_t, g(t), \pi = 0 \ldots$ splacený stav
- $X = U - V^* \ldots$ „collective bonus potential“
- $V^* - V^g \ldots$ „individual bonus potential“
- $V^s - V^f \ldots$ opce při stornu
- $V^f - V^g \ldots$ opce při splacení

Symboly: V rezerva, π pojistné, r ekonomické předp., μ pojistné předp., $\cdot^*$ technické předp.



Hodnota garantovaných plateb

Otázka:

Co by pojišťovna musela zaplatit třetí straně, aby tato převzala závazek pojišťovny?

I když se zaměříme jen na nejlepší odhad pojistného závazku (neuvažujeme případné rizikové, servisní ani jiné přirážky), musí tato hodnota zohlednit:

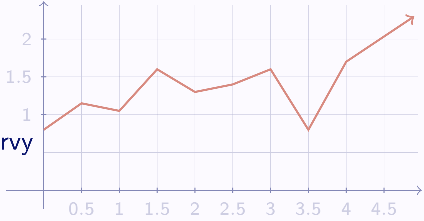
- celkový závazek

$$\max_{\tau^f \leq \infty} \max_{\tau^s \leq \infty} \mathrm{E} \int_t^T e^{-\int_t^s r} dB_t(s; \tau^f, \tau^s),$$

kde $B_t(s; \tau^f, \tau^s)$ je intenzita plateb v čase $s > t$, při použití bonusů alokovaných do okamžiku t, pokud pojistník smlouvu stornuje v τ^s a přestane platit v τ^f. (Oba tyto časy jsou „stopping times" a nemusí nutně nastat.)

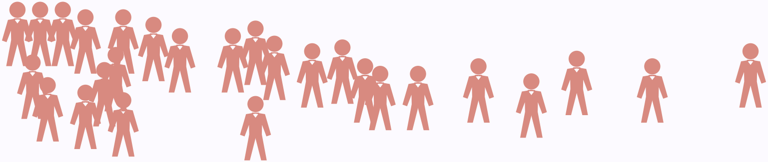
Obsah

Zajištění vs. diversifikace

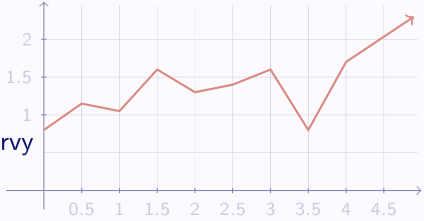


Do uvedených výpočtů hodnoty rezervy vstupovaly dva zdroje náhodnosti:

- $r(t)$:
  Možnost zajištění pomocí tržních aktiv, jejichž cena závisí na stejných zdrojích náhody (na $r(t)$).
- $\mu(t)$:
  V tradičním přístupu předpokládáme, že populace se vyvíjí přesně podle úmrtnostní tabulky $\Rightarrow$ riziko lze diversifikovat.

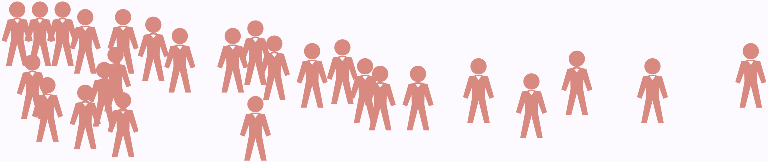


Zajištění vs. diversifikace



Do uvedených výpočtů hodnoty rezervy vstupovaly dva zdroje náhodnosti:

- $r(t)$:
  Možnost zajištění pomocí tržních aktiv, jejichž cena závisí na stejných zdrojích náhody (na $r(t)$).
- $\mu(t)$:
  V tradičním přístupu předpokládáme, že populace se vyvíjí přesně podle úmrtnostní tabulky $\Rightarrow$ riziko lze diversifikovat.



Stochastický vývoj finančních aktiv

„To už umíme."
Nejčastější přístup k modelování: intenzita výnosu aktiva r

$$dr(t) = \alpha(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

a současná hodnota platby 1 v čase T

$$P(t, T) = \mathrm{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r(s)ds}\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Ocenění za rizikově neutrální pravděpodobnostní míry Q (přechod od P ke Q vyjadřuje averzi investorů k riziku), při Q odpovídá střední výnos libovolného tržního aktiva bezrizikovému výnosu ρ:

$$\mathrm{E}_Q\left(e^{\int_t^T r(s)ds}\middle|\mathcal{F}_t\right) = e^{\int_t^T \rho(s)ds}.$$

$\exists Q \Longrightarrow \nexists$ *arbitráž*

Výnos – matematický příklad

Použijeme-li model

$$dr(t) = \alpha(t)\left(\beta(t) - r(t)\right)dt + \sqrt{\gamma(t)r(t) + \delta(t)}\,dW(t)\,,$$

lze odvodit vztah:

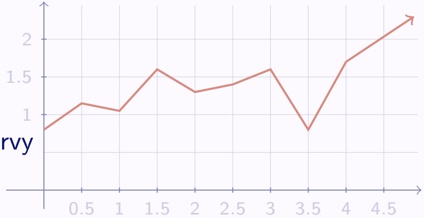
$$P(t, T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}\,,$$

kde A, B jsou deterministické funkce odvozené z α, β, γ, δ.
Pro celkový výnos $R(t) = e^{\int_0^t r(s)ds}$ lze odvodit

$$\begin{aligned} dR(t) &= R(t)C\left(t, r(t)\right)dt + R(t)D\left(t, r(t)\right)dW(t) \\ &= \rho(t)R(t)dt + R(t)D\left(t, r(t)\right)dW(t)\,, \end{aligned}$$

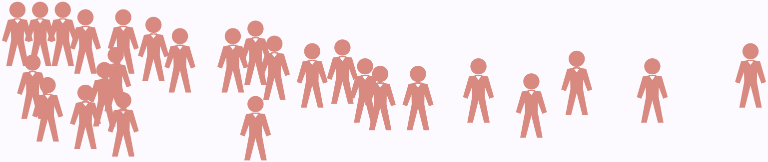
kde C a D jsou opět deterministické funkce. Druhá rovnost plyne z toho, že při Q musí být střední hodnota výnosu aktiva rovna bezrizikovému výnosu. Tato vyjádření se nám mohou hodit později.

Zajištění vs. diversifikace



Do uvedených výpočtů hodnoty rezervy vstupovaly dva zdroje náhodnosti:

- $r(t)$:
  Možnost zajištění pomocí tržních aktiv, jejichž cena závisí na stejných zdrojích náhody (na $r(t)$).
- $\mu(t)$:
  V tradičním přístupu předpokládáme, že populace se vyvíjí přesně podle úmrtnostní tabulky $\Rightarrow$ riziko lze diversifikovat.



Stochastická úmrtnost

Diversifikace $\Leftarrow$ *silný zákon velkých čísel.*

Diversifikace je obtížnější, pokud se úmrtnost vyvíjí skutečně náhodně.

Kromě náhodného vývoje jednotlivých životů může budoucí vývoj úmrtnosti sledovat trendy, které jsou systematické a proti kterým se nelze bránit diversifikací:

- změny životního stylu,
- vývoj ve zdravotnictví,
- epidemie, katastrofy,
- ...

Stochastická úmrtnost

Diversifikace $\Leftarrow$ *silný zákon velkých čísel.*
Diversifikace je obtížnější, pokud se úmrtnost vyvíjí skutečně náhodně.
Kromě náhodného vývoje jednotlivých životů může budoucí vývoj úmrtnosti sledovat trendy, které jsou systematické a proti kterým se nelze bránit diversifikací:

- změny životního stylu,
- vývoj ve zdravotnictví,
- epidemie, katastrofy,
- ...

Vliv na diversifikaci

Je-li úmrtnost $\mu(x,t)$ deterministická,
$L(t) = l_t(x+t)$ je počet přeživších (kteří v čase 0 byli ve věku x) a
$L(0) = n$, pak $L(t)$ má binomické rozdělení a platí:

$$ {}_t p_x = \quad e^{-\int_0^t \mu(x,\tau) d\tau} \,, $$

$$ \mathrm{E}\, L(t) = n \quad e^{-\int_0^t \mu(x,\tau) d\tau} = n \, {}_t p_x \,, $$

$$ \mathrm{Var}\big(L(t)\big) = n \, {}_t p_x (1 - {}_t p_x) \,, $$

$$ Var\left(\frac{L(t)}{n}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 $$

Diversifikací se zbavíme vlivu rozptylu.

Vliv na diversifikaci

Je-li úmrtnost $\mu(x,t)$ stochastická,
$L(t) = l_t(x+t)$ je počet přeživších (kteří v čase 0 byli ve věku x) a
$L(0) = n$, pak $L(t)$ má podmíněně na μ binomické rozdělení a platí:

$$ {}_t p_x = \mathrm{E}\, e^{-\int_0^t \mu(x,\tau)d\tau}\,, $$

$$ \mathrm{E}\, L(t) = n\, \mathrm{E}\, e^{-\int_0^t \mu(x,\tau)d\tau} = n\, {}_t p_x\,, $$

$$ \mathrm{Var}\big(L(t)\big) = \mathrm{E}\ \mathrm{Var}\big(L(t)\,\big|\,\mu\big) + \mathrm{Var}\Big(\mathrm{E}\big(L(t)\,\big|\,\mu\big)\Big) = $$

$$ = n\, {}_t p_x (1 - {}_t p_x) + n^2\, \mathrm{Var}\left(e^{-\int_0^t \mu(x,\tau)d\tau}\right)\,, $$

$$ Var\left(\frac{L(t)}{n}\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 + \mathrm{Var}\left(e^{-\int_0^t \mu(x,\tau)}\right)\,. $$

Diversifikací se nezbavíme systematické složky rozptylu.

Co s tím?

citace z přednášky [Møller & Steffensen]

- What is the problem? Insurers deal with risk! Do what you are in the market to do, be responsible, be a man!
- Insurers pool or diversify risk! Turn macro risk back on the insured!
  (non-life: macro risk reflected in premium movements)
  (life: macro risk reflected in dividends, i.e. premium and/or benefit movements)
  Guaranteed annuities? Drop dead!
- Demand protection.
- Financial newspapers, front page material: Death rates spark the birth of a new market (OTC contracts, mortality derivatives).

Co s tím?

citace z přednášky [Møller & Steffensen]

- What is the problem? Insurers deal with risk! Do what you are in the market to do, be responsible, be a man!
- Insurers pool or diversify risk! Turn macro risk back on the insured! (non-life: macro risk reflected in premium movements) (life: macro risk reflected in dividends, i.e. premium and/or benefit movements) Guaranteed annuities? Drop dead!
- Demand protection.
- Financial newspapers, front page material: Death rates spark the birth of a new market (OTC contracts, mortality derivatives).

Co s tím?

citace z přednášky [Møller & Steffensen]

- What is the problem? Insurers deal with risk! Do what you are in the market to do, be responsible, be a man!
- Insurers pool or diversify risk! Turn macro risk back on the insured!
  (non-life: macro risk reflected in premium movements)
  (life: macro risk reflected in dividends, i.e. premium and/or benefit movements)
  Guaranteed annuities? Drop dead!
- Demand protection.
- Financial newspapers, front page material: Death rates spark the birth of a new market (OTC contracts, mortality derivatives).

Co s tím?

citace z přednášky [Møller & Steffensen]

- What is the problem? Insurers deal with risk! Do what you are in the market to do, be responsible, be a man!
- Insurers pool or diversify risk! Turn macro risk back on the insured!
(non-life: macro risk reflected in premium movements)
(life: macro risk reflected in dividends, i.e. premium and/or benefit movements)
Guaranteed annuities? Drop dead!
- Demand protection.
- Financial newspapers, front page material: Death rates spark the birth of a new market (OTC contracts, mortality derivatives).

Co s tím?

citace z přednášky [Møller & Steffensen]

- What is the problem? Insurers deal with risk! Do what you are in the market to do, be responsible, be a man!
- Insurers pool or diversify risk! Turn macro risk back on the insured!
  (non-life: macro risk reflected in premium movements)
  (life: macro risk reflected in dividends, i.e. premium and/or benefit movements)
  Guaranteed annuities? Drop dead!
- Demand protection.
- Financial newspapers, front page material: Death rates spark the birth of a new market (OTC contracts, mortality derivatives).

Obsah

Existující příklady

Deriváty vázané na vývoj úrokových měr:

- 2003: Swiss Re Vita vydala *„mortality index bond"*
- 2004: EIB/BNP vydala *„longevity bond"* (stažen ke konci 2005)
- 2005: Swiss Re Vita II
- 2006: Swiss Re Vita III a AXA Osiris
- 2007: LifeMetrics (JPMorgan, Pensions Institute)
- Pojistná portfolia (zejména v USA) zajištěna sekuritizací (převedením rizika na trh)
- Survivor swaps [1] : nabízené zajišťovnami

Cílem nabízených derivátů na úmrtnost je poskytnout zajištění systematické složky ve vývoji úmrtnosti.

[1] Povšimněte si, že produkty se jmenují „survivor . . . " – asi považováno za lépe znějící než „mortality . . . "

Survivor bonds

Mějme: $l_t(x)$ počet žijících v čase t a věku x,

$$S(t,x) = \frac{l_t(x+t)}{l_0(x)}$$

je stochastický proces, který chceme zajistit,

$${}_{\tau}p_x^t = \mathrm{E}_Q \left(S(\tau, x) \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right) , \quad t < \tau \,.$$

Otázkou je volba míry Q – měla by vyjadřovat averzi k riziku mezi účastníky trhu.
Dluhopis daný intenzitou výplat:

$$dB(t) = S(t,x)dt \,, \quad t < T \,.$$

Cena dluhopisu:

$$\mathrm{E}_Q \left(\int_t^T e^{-\int_t^\tau r} S(\tau, x) d\tau \right) \overset{\text{nez. } r,\,\mu}{=} \int_t^T P(t,\tau)\,{}_{\tau}p_x^t d\tau$$

Survivor swaps

Očekávaná úmrtnost (stanovená v čase 0 pro $\forall t > 0$): ${}_tp_x^{fix}$.
Swap daný intenzitou výplat (pro $t < T$):

$$dB(t) \quad = \quad \big(\underbrace{S(t,x)}_{\text{náhodné}} - \underbrace{{}_tp_x^{fix}}_{\text{pevné}}\big)\,dt$$

Cena swapu v čase t:

$$\mathrm{E}_Q\left(\int_t^T e^{-\int_t^\tau r}\,dB(\tau)\right) \overset{\text{nez. } r,\,\mu}{=} \int_t^T P(t,\tau)\left({}_\tau p_x^t - {}_\tau p_x^{fix}\right)d\tau$$

Derivát přímo kryjící riziko spojené s budoucím vývojem úmrtnosti. Typicky nabízen zajistitelem a koupen penzijním fondem, který tak dosáhne lepší konsistence aktiv a pasiv.

EIB/BNP longevity bond [2]

Vydán 2004, ale už v 2005 stažen.
Zacílen zejména na britské pensijní fondy.

- EIB: vydala konečný dluhopis
- BNP: úrokový swap s EIB (£/€)
- Partner Re: zajištění rizika úmrtnosti (survivor swap)

Počáteční hodnota dluhopisu: £540 mil.

Parametry: $t = 2003$, $x = 65$, $T = t + 25$,
$\mu =$ úmrtnost mužů v Anglii a Walesu,

[2] viz též [SAV 06/07]

EIB/BNP longevity bond - cena

Kuponové platby: $dB(t) = c \times S(t, x)dt$
Výpočet nominální ceny zahrnoval prémii pro kupující v diskontu i v úmrtnosti:

$$\int_0^T \underbrace{P(0,\tau)e^{\delta_1 \tau}}_{\text{diskont } +15\text{bp}} \; \underbrace{{}_\tau p_x e^{\delta_1 \tau}}_{\text{prav. přežití } +20\text{bp}} \, d\tau \, .$$

Způsob konstrukce – byl přirozený?
Vhodné i pro pojistitele mimo Británii?

Swiss Re Vita

Vita Capital 2003: $t = 2004,\ T = t + 3$
Počáteční jistina dluhopisu: $H_0 = \$\ 400$ mil.
Vázáno na index úmrtností $I(t)$ pro několik zemí, věků, pohlaví

$C(\ell, \cdot, g)$: 70% USA, 15% VB, 7,5% Francie, 5% Itálie, 2,5% Švýcarsko;
65% muži, 35% ženy

$$I(t) = \sum_{\ell,x,g} C(\ell, x, g)\, \mu(t, x - t, g, \ell)$$

Index ztráty pro $t = 1, 2, 3$:

$$L(t) = \frac{1}{0,2I(0)} \left((I(t) - 1,3I(0))^+ - (I(t) - 1,5I(0))^+ \right)$$

Snížení jistiny: $H(t) = \left(1 - \sum_{s=1}^{t} L(s)\right)^+$

Swiss Re Vita

Vita Capital 2003: $t = 2004$, $T = t + 3$
Počáteční jistina dluhopisu: $H_0 = \$\ 400$ mil.
Vázáno na index úmrtností $I(t)$ pro několik zemí, věků, pohlaví

Intensita kuponových plateb v $t < T$:

$$dB(t) = (r(t) + \delta)H(0)dt\,,$$

nakonec vyplacena jistina $H(T)$.

$I(t)/I(0) < 1,3 \Rightarrow$ nakonec vyplacena celá jistina,
$I(t)/I(0) \in \langle 1,3; 1,5\rangle \Rightarrow$ jistina lineárně snížena,
$I(t)/I(0) > 1,5 \Rightarrow$ jistina nevyplacena.

Zajišťovna prodejem dluhopisu kryje systematickou část svého rizika, kupujícími mohou být poskytovatelé důchodů (opačné riziko).

Obsah

Model úmrtnosti

Budeme předpokládat, že intenzita úmrtnosti v čase $t > 0$ člověka, jenž je na počátku ve věku x, je

$$\mu(x,t) = \mu^0(x+t)\zeta(x,t)\,,$$

kde $\mu^0(x+t)$ je současná (v $t=0$) intenzita pro věk $x+t$ (naše úmrtnostní tabulka) a $\zeta(x,t)$ je stochastický proces udávající budoucí vývoj úmrtnosti, $\zeta(\cdot,0)=1$.
Pak pravděpodobnost přežití tohoto člověka od t do T (za podmínky, že v t žije) je rovna

$$S(x,t,T) = \mathrm{E}_Q\left(e^{-\int_t^T \mu(x,\tau)d\tau}\middle|\mathcal{F}_t\right)\,.$$

Model úmrtnosti – příklad

Pro modelování vývoje intenzity úrokové míry se často užívají modely následujícího typu (např. Vašíčkův model):

$$dr(t) = \alpha(t)\left(\beta(t) - r(t)\right)dt + \sigma(t)dW_t^r\,.$$

Podobný model může být použit pro vývoj úmrtnosti:

$$d\zeta(x,t) = \alpha(x,t)\left(\beta(x,t) - \zeta(x,t)\right)dt + \sigma(x,t)dW_t^\mu\,,$$

kde W^μ budeme předpokládat nezávislé na W^r.
Výsledná pravděpodobnost přežití je pak

$$S(x,t,T) = e^{A(x,t,T) - B(x,t,T)\mu(x,t)}\,,$$

pro nějaká A, B přímo závisející na α, β, σ.

Forward rate

Definujeme si „forward rate“ pro úrok a analogicky pro úmrtnost:

- $f^r(t, T) = \frac{\partial}{\partial T} P(t, T), \forall T > t;$

$$e^{-\int_t^T f^r(t,\tau)d\tau} = P(t, T) = \mathrm{E}_Q \left(e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) .$$

- $f^\mu(x, t, T) = \frac{\partial}{\partial T} S(x, t, T), \forall T > t;$

$$e^{-\int_t^T f^\mu(x,t,\tau)d\tau} = S(x, t, T) = \mathrm{E}_Q \left(e^{-\int_t^T \mu(x,\tau)d\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) .$$

Obsah

Rezerva

Vrátíme se k (prospektivnímu) výpočtu rezervy pomocí

$$V(x,t) = \mathrm{E}_Q \left(\int_t^T e^{-\int_t^s r(\tau)d\tau} dB_t(x,s) \middle| \mathcal{F}_t \right) ,$$

kde

$$\begin{aligned} dB_t(x,s) &= b^d(s)d\left(1 - S(x,t,s)\right) \\ &\quad + b^T S(x,s,T)\chi_{\{T\}}(s) - \pi(s)S(x,t,s)dt \,, \end{aligned}$$

b^d je výplata při smrti, b^T při dožití a π jsou platby během trvání pojistky.
Odtud:

$$\begin{aligned} V(x,t) &= \mathrm{E}_Q \left(\int_t^T e^{-\int_t^s r(\tau)+\mu(x,\tau)d\tau} \left(\mu(x,s)b^d(s) - \pi(s)\right) ds \right. \\ &\quad \left. + b^T e^{-\int_t^T r(\tau)+\mu(x,\tau)d\tau} \middle| \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

Rezerva – výpočet

Zaveďme si pomocné značení $V(x, t_0, t) = \mathrm{E}_Q\left(V(x,t)|\mathcal{F}_{t_0}\right)$. Je-li současný čas t_0, pak označíme $b^d_{t_0}$, $b^T_{t_0}$, π_{t_0} současné odhady budoucích peněžních toků (ty nemusí být pevně určeny např. při rozdělování podílů na zisku). Pro $t > t_0$ opět platí Thieleho diferenciální rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x, t_0, t) = f^r(t_0, t) V(x, t_0, t) + \pi_{t_0}(t) - f^\mu(x, t_0, t)\left(b^d_{t_0}(t) - V(x, t_0, t)\right),$$

$$V(x, t_0, T) = b^T_{t_0}.$$

Z těchto rovnic lze zpětně dopočítat $V(x, t_0) = V(x, t_0, t_0)$.

Obsah

Struktura trhu

V našem modelu předpokládáme, že veškerá náhodnost vyplývá buď z pohybu finančních aktiv, nebo úmrtnosti:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W^r_\tau, W^\mu_\tau, \forall \tau \leq t\}\,.$$

Vlivy:

- Peníze (úročené bezrizikově). $B_t = e^{\int_0^t \rho}$.
- Bezkuponový dluhopis s cenou $P(t, T)$, daný úrokovou mírou r (zdroj náhodnosti W^r) a dobou do splatnosti $T - t$. Zde r představuje výnos finančního portfolia pojišťovny. $P(t, T) = \mathrm{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r} \mid \mathcal{F}_t\right)$, $R_t = e^{\int_0^t r}$.
- Systematická úmrtnost, závisí na W^μ. Může být k disposici derivát závisející na této úmrtnosti.

Struktura trhu

V našem modelu předpokládáme, že veškerá náhodnost vyplývá buď z pohybu finančních aktiv, nebo úmrtnosti:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W^r_\tau, W^\mu_\tau, \forall \tau \leq t\}\,.$$

Vlivy:

- Peníze (úročené bezrizikově). $B_t = e^{\int_0^t \rho}$.
- Bezkuponový dluhopis s cenou $P(t, T)$, daný úrokovou mírou r (zdroj náhodnosti W^r) a dobou do splatnosti $T - t$. Zde r představuje výnos finančního portfolia pojišťovny. $P(t, T) = \mathrm{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r} \,|\, \mathcal{F}_t\right)$, $R_t = e^{\int_0^t r}$.
- Systematická úmrtnost, závisí na W^μ. Může být k disposici derivát závisející na této úmrtnosti.

Struktura trhu

V našem modelu předpokládáme, že veškerá náhodnost vyplývá buď z pohybu finančních aktiv, nebo úmrtnosti:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W^r_\tau, W^\mu_\tau, \forall \tau \leq t\}\,.$$

Vlivy:

- Peníze (úročené bezrizikově). $B_t = e^{\int_0^t \rho}$.
- Bezkuponový dluhopis s cenou $P(t,T)$, daný úrokovou mírou r (zdroj náhodnosti W^r) a dobou do splatnosti $T-t$. Zde r představuje výnos finančního portfolia pojišťovny. $P(t,T) = \mathrm{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r} \,|\, \mathcal{F}_t\right)$, $R_t = e^{\int_0^t r}$.
- Systematická úmrtnost, závisí na W^μ. Může být k disposici derivát závisející na této úmrtnosti.

Struktura trhu

V našem modelu předpokládáme, že veškerá náhodnost vyplývá buď z pohybu finančních aktiv, nebo úmrtnosti:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{W^r_\tau, W^\mu_\tau, \forall \tau \leq t\}\,.$$

Vlivy:

- Peníze (úročené bezrizikově). $B_t = e^{\int_0^t \rho}$.
- Bezkuponový dluhopis s cenou $P(t, T)$, daný úrokovou mírou r (zdroj náhodnosti W^r) a dobou do splatnosti $T - t$. Zde r představuje výnos finančního portfolia pojišťovny.
  $P(t, T) = \mathrm{E}_Q \left(e^{-\int_t^T r} \,|\, \mathcal{F}_t \right)$, $R_t = e^{\int_0^t r}$.
- Systematická úmrtnost, závisí na W^μ. Může být k disposici derivát závisející na této úmrtnosti.

Portfolio aktiv

Otázka:

Lze rezervu replikovat portfoliem finančních aktiv, a pokrýt tak veškeré riziko?

Pokud ano, tak existuje investiční strategie $h = (h_1, h_2)$ udávající samoreplikující portfolio

$$X_t = h_1(t)R_t + h_2(t)B_t\,,$$

které pokryje veškeré riziko $V(x, t)$. Pokud ne, chceme pomocí X_t pokrýt co největší část rizika $V(x, t)$.

Martingaly

Zavedeme si pomocné značení

$$V^M(t) = \mathrm{E}_Q\left(\int_0^T e^{-\int_0^\tau r} dB(x,\tau) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) .$$

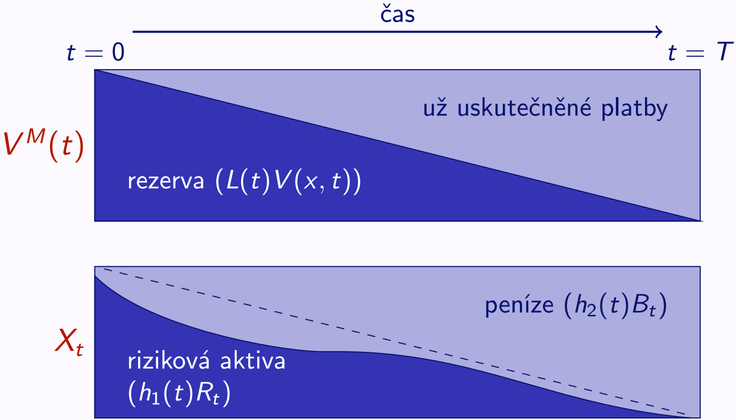
Pak $V^M(t)$ je Q-martingal a navíc platí

$$V^M(t) \quad = \quad \underbrace{\int_0^t e^{-\int_0^\tau r} dB(x,\tau)}_{\text{vyplaceno (peníze)}} + \underbrace{e^{-\int_0^t r} L(t)\, V(x,t)}_{\text{diskont} \times \text{počet přeživších} \times \text{jednotková rezerva}} .$$

V rizikově neutrálním světě je $\mathrm{E}_Q R_t = \mathrm{E}_Q B_t$, a tedy i $\frac{R_t}{B_t}$ je Q-martingal.

Martingaly – poznámka

Výpočet s $V^M(t)$ namísto $V(x,t)$ lze použít BÚNO:



Odečteme-li od X_t vyplacenou hodnotu $\Rightarrow$ zůstanou aktiva kryjící rezervu.

Rozklad rizika

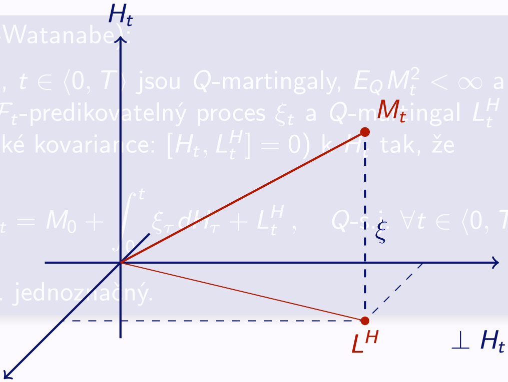
Věta (Kunita-Watanabe):

Nechť M_t, H_t, $t \in \langle 0, T \rangle$ jsou Q-martingaly, $E_Q M_t^2 < \infty$ a $E_Q H_t^2 < \infty$. Pak existuje $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces ξ_t a Q-martingal L_t^H ortogonální (dle kvadratické kovariance: $[H_t, L_t^H] = 0$) k H_t tak, že

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_\tau dH_\tau + L_t^H \,, \quad Q\text{-s.j. } \forall t \in \langle 0, T \rangle \,.$$

Rozklad je s.j. jednoznačný.

Rozklad rizika



Věta (Kunita-Watanabe):

Nechť M_t, H_t, $t \in \langle 0, T \rangle$ jsou Q-martingaly, $E_Q M_t^2 < \infty$ a $E_Q H_t^2 < \infty$. Pak existuje $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces ξ_t a Q-martingal L_t^H ortogonální (dle kvadratické kovariance: $[H_t, L_t^H] = 0$) k H_t tak, že

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_\tau \, dH_\tau + L_t^H , \quad Q\text{-s.j. } \forall t \in \langle 0, T \rangle .$$

Rozklad je s.j. jednoznačný.

Rozklad rizika

Věta (Kunita-Watanabe):

Nechť M_t, H_t, $t \in \langle 0, T \rangle$ jsou Q-martingaly, $E_Q M_t^2 < \infty$ a $E_Q H_t^2 < \infty$. Pak existuje $\mathcal{F}_t$-predikovatelný proces ξ_t a Q-martingal L_t^H ortogonální (dle kvadratické kovariance: $[H_t, L_t^H] = 0$) k H_t tak, že

$$M_t = M_0 + \int_0^t \xi_\tau \, dH_\tau + L_t^H \,, \quad Q\text{-s.j. } \forall t \in \langle 0, T \rangle \,.$$

Rozklad je s.j. jednoznačný.

Aplikujeme na rezervu:

$$V^M(t) = V^M(0) + \int_0^t \xi_\tau^R \, d\frac{R_\tau}{B_\tau} + L_t^R \,.$$

Rozklad rizika – výpočet

Z toho, co už víme, dostáváme:

$$dB_t = \rho(t) B_t dt \,,$$

$$dR_t = \rho(t) R_t dt + R_t D\left(t, r(t)\right) dW_t^r \,,$$

$$\begin{aligned} dB_t^{-1} X_t &= -\rho(t) B_t^{-1} X_t + B_t^{-1} \left(h_1(t) dR_t + h_2(t) dB_t\right) \\ &= h_1(t) R_t D(t, r(t)) dW_t^r \,, \end{aligned}$$

$$dV^M(t) = \xi_t^R R_t D\left(t, r(t)\right) dW_t^r + dL_t^R \,.$$

Položením $X_0 = V^M(0) = L(0) V(x, 0)$, $h_1(t) = \xi_t^R$ a $h_2(t) = X_t(t) - h_1(t) R_t$ získáme portfolio X zajišťující finanční riziko vývoje rezervy.

Rozklad rizika – výsledek

Pro libovolné samoreplikující portfolio X dané strategií (h_1, h_2) splňující $X_0 = V^M(0)$ a libovolné $t \leq T$ platí:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_Q\left(V^M(t) - B_t^{-1}X_t\right) = &\quad Var_Q\left(\int_0^t \left(\xi_t^R - h_1(t)\right) R_t D\, dW_t^r + L_t^R\right) \\
\overset{W^r \perp L_t^R}{=} &\quad \int_0^t \left(\xi_t^R - h_1(t)\right)^2 R_t^2 D^2\, dt + \mathrm{Var}_Q(L_t^R)
\end{aligned}$$

Volba $h_1(t) = \xi_t^R$ tedy sice nepokryje riziko dané úmrtností (L^R), ale ze všech možných voleb je optimální z hlediska rozptylu.

Portfolio s deriváty na úmrtnost

Zkusíme přidat do aktiv derivát na úmrtnost – například swap s cenou

$$Z_t = \mathrm{E}_Q\left(\int_t^T e^{-\int_t^\tau r}\left(S(\tau,x) - {}_t p_x\right)\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

kde $S(\tau, x)$ je opět skutečný podíl přežívajících a ${}_t p_x$ je pevná sazba, určená v čase 0. Jako u rezervy si vytvoříme pomocnou proměnnou

$$Z_t^M = \mathrm{E}_Q\left(\int_0^T e^{-\int_0^\tau r}\left(S(\tau,x) - {}_t p_x\right)\middle|\mathcal{F}_t\right),$$

která vyjadřuje zároveň hodnotu Z_t a už uskutečněných výplat, vše zdiskontováno k času 0.
Z_t^M je Q-martingal.

Rozklad rizika s deriváty na úmrtnost

Opět lze užít větu Kunity-Watanabe:

$$dB_t^{-1}X_t = h_1(t)R_t D dW_t^r \,,$$

$$dZ_t^M = \xi_t^{Z,r} dW_t^r + \xi_t^{Z,\mu} dW_t^\mu \,,$$

$$dV_t^M = \xi_t^R R_t D dW_t^r + \xi_t^\mu dW_t^\mu \,.$$

Po dopočítání jednotlivých výrazů lze zcela pokrýt riziko vývoje rezervy portfoliem skládajícím se z R_t, Z_t a hotovosti.

V praxi ale typicky nebude tržní derivát na úmrtnost Z_t zcela vystihovat chování úmrtnosti v pojištěném kmeni.

V tomto modelu to můžeme zohlednit zavedením zdrojů rizik $W^{\mu,1}$ a $W^{\mu,1}$, kde kmenová úmrtnost μ závisí na $\sigma^1 W^{\mu,1} + \sigma^2 W^{\mu,2}$, zatímco tržní derivát např. na $\sigma^Z W^{\mu,1}$. Replikace chování rezervy portfoliem aktiv pak opět nebude úplná.

Rozklad rizika s deriváty na úmrtnost

Opět lze užít větu Kunity-Watanabe:

$$dB_t^{-1}X_t = h_1(t)R_t D dW_t^r \,,$$

$$dZ_t^M = \xi_t^{Z,r} dW_t^r + \xi_t^{Z,\mu} dW_t^\mu \,,$$

$$dV_t^M = \xi_t^R R_t D dW_t^r + \xi_t^\mu dW_t^\mu \,.$$

Po dopočítání jednotlivých výrazů lze zcela pokrýt riziko vývoje rezervy portfoliem skládajícím se z R_t, Z_t a hotovosti.
V praxi ale typicky nebude tržní derivát na úmrtnost Z_t zcela vystihovat chování úmrtnosti v pojištěném kmeni.
V tomto modelu to můžeme zohlednit zavedením zdrojů rizik $W^{\mu,1}$ a $W^{\mu,1}$, kde kmenová úmrtnost μ závisí na $\sigma^1 W^{\mu,1} + \sigma^2 W^{\mu,2}$, zatímco tržní derivát např. na $\sigma^Z W^{\mu,1}$. Replikace chování rezervy portfoliem aktiv pak opět nebude úplná.

Shrnutí

Při určování hodnoty závazků pojišťovny je třeba brát v úvahu:

- Finanční vývoj:
  Rizika spojená s výnosem z investic lze zajistit (hedge).
- Vývoj úmrtnosti:
  V případě nesystematické složky rizika toto riziko lze snížit diversifikací. V případě systematické složky se poslední dobou vedle pojistného zajištění objevují finanční deriváty s hodnotou závislou na vývoji úmrtnosti. Tyto deriváty pak mohou do určité míry posloužit k pokrytí rizika spojeného s vývojem úmrtnosti.
- Chování pojistníků:
  Při stanovování hodnoty závazků je třeba uvažovat výši garantovaných budoucích plateb při trvání pojištění (v našem značení V^g), ale i možnost storen, zastavení splátek pojistného apod.

Shrnutí

Při určování hodnoty závazků pojišťovny je třeba brát v úvahu:

- Finanční vývoj:
  Rizika spojená s výnosem z investic lze zajistit (hedge).
- Vývoj úmrtnosti:
  V případě nesystematické složky rizika toto riziko lze snížit diversifikací. V případě systematické složky se poslední dobou vedle pojistného zajištění objevují finanční deriváty s hodnotou závislou na vývoji úmrtnosti. Tyto deriváty pak mohou do určité míry posloužit k pokrytí rizika spojeného s vývojem úmrtnosti.
- Chování pojistníků:
  Při stanovování hodnoty závazků je třeba uvažovat výši garantovaných budoucích plateb při trvání pojištění (v našem značení V^g), ale i možnost storen, zastavení splátek pojistného apod.

Shrnutí

Při určování hodnoty závazků pojišťovny je třeba brát v úvahu:

- Finanční vývoj:
  Rizika spojená s výnosem z investic lze zajistit (hedge).
- Vývoj úmrtnosti:
  V případě nesystematické složky rizika toto riziko lze snížit diversifikací. V případě systematické složky se poslední dobou vedle pojistného zajištění objevují finanční deriváty s hodnotou závislou na vývoji úmrtnosti. Tyto deriváty pak mohou do určité míry posloužit k pokrytí rizika spojeného s vývojem úmrtnosti.
- Chování pojistníků:
  Při stanovování hodnoty závazků je třeba uvažovat výši garantovaných budoucích plateb při trvání pojištění (v našem značení V^g), ale i možnost storen, zastavení splátek pojistného apod.

Závěr

Co když není pro pojistníky výhodné setrvávat v pojištění nebo platit „standardním“ způsobem?

- Pojistitel může dále nabízet současné produkty, ale více radit pojistníkům, jak přizpůsobit pojištění svým preferencím (např. výběrem vhodného investičního profilu při investičním pojištění).
- Pojistitel může navrhovat nové produkty způsobem, který zaručí, že pro pojistníky nebude výhodné zvolit „nestandardní“ způsob využití tohoto produktu. Při návrhu je v takovém případě třeba počítat s budoucí nejistotou, ale i s různými možnostmi budoucího chování pojistníků.

Děkuji za pozornost.

Literatura

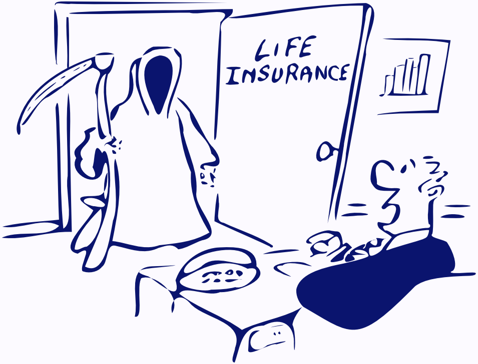
Møller, T. a Steffensen, M.:
Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance.
Cambridge University Press, Cambridge 2006.

Møller, T. a Steffensen, M.:
Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance: Part I and II
Presentations at the International Summer School 2007, Laussane 2007.

Mandl, P.:
Oceňování rizikových aktiv a sekuritizace rizik životního pojištění
Seminář z aktuárských věd, MFF 11.5.2007.

Přestávka

Rozdíl mezi deterministickou a stochastickou úmrtností:



„Mýlíte se.
Podle našich úmrtnostních tabulek mám žít do 89.“

▸ zpět