Model pro stanovení solventnosti v neživotní pojišťovně při informaci o jednotlivých škodách

Mgr. Radka Trchová

Head of actuarial portfolio analysis
Allianz Elementar Versicherungs-AG
Vienna, Austria

20. duben 2007

Agenda

- Stochastické rezervování a zajištění
- Model pro kumulativní škody (prof. Mandl)
- Model při informaci o jednotlivých škodách
  - Model pro počty škod
  - Model pro výše škod
  - Model pro celkové škody
  - Porovnání s modelem pro kumulativní škody (Mandl)
  - Volné prostředky
- XL-zajištění
  - Rezerva
  - Volné prostředky - Jednokrokový model
- Odhad parametrů

Zajištění v rezervovacích modelech

V praxi se pro výpočet rezerv pro čisté škody užívají dvě metody

- Výpočet přímo z čistých dat
  - Vyžaduje historickou informaci o čistých škodách
  - Pokud se zajištění mění, nemusí být splněny předpoklady modelů
- Uplatnění koeficientu na rezervu pro hrubé škody
  - Zkreslené pro neproporcionální zajištění
  - Příliš zjednodušující pro stochastické modely

Log-lineární modely

Inkrementální platby C_{ij} : $\quad Y_{ij} = \log(C_{ij})$

$$Y_{ij} = m_{ij} + \epsilon_{ij}, \quad \epsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$$

Model pro m_{ij}

$$m_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j,$$

alternativně (Hoerl curve)

$$m_{ij} = c + \alpha_i + \beta_i \log(j) + \gamma_i j.$$

- Odhady blízko chain ladder, ale ne stejné.
- Přírůstky musí být kladné - problém pro hlášené škody.

Wrightův model

Podepření log-lineárního modelu složeným rozdělením pro inkrementální platby

$$EC_{ij} = EN_{ij} EX_{ij},$$

$$\mathrm{Var}(C_{ij}) = EN_{ij} \mathrm{Var}(X_{ij}) + EX_{ij}^2 \mathrm{Var}(N_{ij}).$$

Poissonovo rozdělení pro počty škod

$$EN_{ij} = e_i a_j \kappa_i j^{A_i} e^{-b_i j} = \mathrm{Var}(N_{ij}).$$

Rozdělení gamma typu pro inkrementální výše škod

$$EX_{ij} = e^{\delta(i+j)} k j^{\lambda}.$$

$$\mathrm{Var} X_{ij} = EX_{ij}^2 v,$$

Zobecněné lineární modely (GLM) - Over-dispersed Poisson (ODP)

Modelují se inkrementální škody přímo

$$EC_{ij} = m_{ij},$$

$$\mathrm{Var}(C_{ij}) = \Phi m_{ij}.$$

Struktura m_{ij}

$$\log(m_{ij}) = c + \alpha_i + \beta_j.$$

- Parametry se odhadnou metodou maximální věrohodnosti.
- Best estimate odpovídá odhadu pomocí chain ladder.
- Jednotlivé přírůstky mohou být i záporné, střední hodnota však musí být kladná.

ODP Model - Bootstrapping

- Parametrizace modelu
- Utvoření Pearsonových reziduí

$$r_{ij} = \frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{\Phi}\hat{m}_{ij}}}$$

- Simulace pseudo-Pearsonových reziduí
- Výpočet pseudo-dat

$$C_{ij}^{B} = r_{ij}^{B}\sqrt{\hat{\Phi}\hat{m}_{ij}} + \hat{m}_{ij}$$

- Předpovědi $\tilde{C}_{ij} = \hat{m}_{ij}^{B}$ neobsahují process error
- Process error: C_{ij}^{*} se simulují z ODP-rozdělení

Mackův model

Rekurzivní model pro kumulativní škody D_{ij}

$$E\,[D_{ij}|D_{ij-1}] = \lambda_j D_{ij-1},$$

$$\mathrm{Var}[D_{ij}|D_{ij-1}] = \sigma_j^2 D_{ij-1}, \quad j = 2, 3, \ldots .$$

Ekvivalentně pomocí vývojových faktorů

$$E\,[f_{ij}|D_{ij-1}] = \lambda_j\,,$$

$$\mathrm{Var}[f_{ij}|D_{ij-1}] = \frac{\sigma_j^2}{D_{ij-1}}.$$

Umožňuje negativní přírůstky. Distribution free.

Model pro kumulativní škody (prof. Mandl)

Model vychází z trojúhelníka kumulativních zaplacených škod

$$
\begin{array}{llll}
X_{t-r,0} & X_{t-r,1} & \dots & X_{t-r,r} \\
\dots & \dots & & \\
X_{t-1,0} & X_{t-1,1} & & \\
X_{t,0}. & & &
\end{array}
$$

a předpokládá, že po r letech je vývoj každé škody ukončen.
V souladu s předpokladem metody chain ladder

$$E\{X_{s,j+1}|X_{s,0},...,X_{s,j}\} = X_{s,j}c_j$$

je definován multiplikativní model

$$X_{s,j+1} = X_{s,j}\left(1 + (c_j - 1)E_{s,j+1}\right), \quad (1)$$

kde $E_{s,j}$ jsou i.i.d. n.v. mající při pevném j stejný druhý a třetí moment, které jsou nezávislé na $\{X_{s,0}\}$ a splňují $EE_{s,j} = 1$.

Rezerva

Nediskontovaná škodní rezerva v čase t je

$$\sum_{j=0}^{r-1} X_{t-j,j}(c_j \ldots c_{r-1} - 1).$$

Rezerva zvýšená o rizikovou marži (na úrovni spolehlivosti 75%):

$$R_t = \sum_{j=0}^{r-1} E\{X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j} | \Delta\} + z_{0.75} \sqrt{Var\left(\sum_j (X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j} | \Delta\right)},$$

kde $z_{0.75}$ je např. kvantil normálního rozdělení, nebo obecně parametr vyjadřující míru opatrnosti.

Alokované volné prostředky

Označení:

B_t	zasloužené rizikové pojistné v roce t ke konci období (deterministické),
u_0	počáteční alokovaný kapitál,
u_t	kapitál alokovaný v čase t příštímu období,
$F = 1 + i$	kde i je zhodnocení finančních prostředků,
$G = 1 + (1 - \gamma)i$	kde γ je průměrná doba úhrady škod během roku,
$X_{t-j,j} = {}^jX_t$	prvky na diagonále

Riziková rezerva

Riziková rezerva na konci roku t+1:

$$U_{t+1} = u_t F + B_{t+1} + R_t F - R_{t+1} -$$

$$- \left({}^{0}X_{t+1} + \sum_{j=1}^{r-1} ({}^{j}X_{t+1} - {}^{j-1}X_t) + {}^{r-1}X_t E_{t+1,r} (c_{r-1} - 1) \right) G$$

u_0 v jednokrokovém modelu se stanoví z $P(U_1 < 0) = 0.005$ pomocí NP2 aproximace

$$0 = EU_1 - z_{0.995} \sqrt{E\overline{U}_1^2} + \frac{E\overline{U}_1^3}{6E\overline{U}_1^2} (z_{0.995}^2 - 1).$$

Model při informaci o jednotlivých škodách - Intuitivní úvaha

Idea: Veličinu $X_{s,j}$ budeme modelovat složeným rozdělením

$$X_{s,j} = \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j}} Y_{s,j,k}, \quad j = 0, \cdots, r,$$

a užijeme stejný model na jednotlivé škody:

$$Y_{s,j+1,k} = Y_{s,j,k} \left(1 + (d_j - 1)\tilde{E}_{s,j+1,k}\right).$$

A co škody nově se v trojúhelníku objevující?
$\longrightarrow$ Nejprve zavedeme model pro počty škod.

Příklad

Počty škod:

	0	1	2
2004	5	2	1
2005	4	2	
2006	5		

Zaplacené škody z roku 2004:

	0	1	2
1	10	14	15
2	8	11	12
3	11	14	14
4	6	8	9
5	11	13	14
6	-	10	12
7	-	9	10
8	-	-	9

Model pro počty škod

$$\begin{array}{llll} N_{t-r,0} & N_{t-r,1} & \ldots & N_{t-r,r} \\ \ldots & \ldots & & \\ N_{t-1,0} & N_{t-1,1} & & \\ N_{t,0}. & & & \end{array}$$

Pro modelování budeme vycházet z inkrementálního trojúhelníka

$$\begin{array}{llll} \tilde{N}_{t-r,0} & \tilde{N}_{t-r,1} & \ldots & \tilde{N}_{t-r,r} \\ \ldots & \ldots & & \\ \tilde{N}_{t-1,0} & \tilde{N}_{t-1,1} & & \\ \tilde{N}_{t,0}, & & & \end{array}$$

kde

$$\tilde{N}_{s,j} = N_{s,j} - N_{s,j-1}, \quad j = 1, \ldots r,$$

$$\tilde{N}_{s,0} = N_{s,0}.$$

Model pro počty škod

$$\tilde{N}_{s,j}|N_{s,j-1} \sim \mathrm{Po}(b_{s,j}N_{s,j-1}), \quad j = 1, ..., r,$$

kde $0 \leq b_{s,j} < 1, b_{s,j} = 0, j \geq r$.

$$\tilde{N}_{s,0} \sim \mathrm{Po}(\lambda_s).$$

Z předpokladu Poissonova rozdělení plyne

$$E[\tilde{N}_{s,j}|N_{s,j-1}] = b_{s,j}N_{s,j-1}, \quad s > 0,$$

$$E\tilde{N}_{0,j} = \lambda_s,$$

$$\mathrm{Var}[\tilde{N}_{s,j}|N_{s,j-1}] = b_{s,j}N_{s,j-1}, \quad s > 0,$$

$$\mathrm{Var}\tilde{N}_{0,j} = \lambda_s.$$

Model pro počty škod - rekurzivní vztahy

Střední hodnota:

$$E[N_{s,j}|N_{s,j-1}] = E[N_{s,j-1} + \tilde{N}_{s,j}|N_{s,j-1}] =$$

$$= N_{s,j-1} + N_{s,j-1}b_{s,j-1} = N_{s,j-1}(1 + b_{s,j-1}),$$

Rozptyl:

$$\mathrm{Var}[N_{s,j}|N_{s,j-1}] = \mathrm{Var}[N_{s,j-1} + \tilde{N}_{s,j}|N_{s,j-1}] =$$

$$= \mathrm{Var}[\tilde{N}_{s,j}|N_{s,j-1}] = N_{s,j-1}b_{s,j-1}.$$

Model pro počty škod - nepodmíněná střední hodnota

Střední hodnota:

$$E[N_{s,j}] = E\left[E[N_{s,j}|N_{s,j-1}]\right] = E\left[N_{s,j-1}(1+b_{s,j-1})\right] =$$

$$= (1+b_{s,j-1})E[N_{s,j-1}] = \cdots = \lambda_s \prod_{k=0}^{j-1}(1+b_{s,k})$$

Rozptyl:

$$\mathrm{Var}[N_{s,j}] = \tilde{q}_{s,0,j}\lambda_s,$$

kde

$$\tilde{q}_{s,0,j} = \sum_{h=0}^{j-1}\left(b_{s,h}\prod_{k=h+1}^{j-1}(1+b_{s,k})^2\prod_{i=0}^{h-1}(1+b_{s,i})\right) + \prod_{k=0}^{j-1}(1+b_{s,k})^2.$$

Model pro počty škod - konečný počet v závislosti na diagonále

Střední hodnota:

$$E[N_{t-j,r}] = N_{t-j,j} \prod_{k=j}^{r-1} (1 + b_{t-j,k}).$$

Rozptyl:

$$\mathrm{Var}[N_{t-j,r} | N_{t-j,j}] = q_{t-j,j,r-1} N_{t-j,j},$$

kde

$$q_{t-j,j,r} = \sum_{h=j}^{r-1} \left(b_{t-j,h} \prod_{k=h+1}^{r-1} (1 + b_{t-j,k})^2 \prod_{i=j}^{h-1} (1 + b_{t-j,i}) \right).$$

Model pro výše škod

Označíme

$$Y^l_{s,j,k}, \quad l = 0, ..., j, k = 1, ..., \tilde{N}_{s,l},$$

škody vzniklé v roce $s = 0 \cdots t$ ve vývojovém roce $j = 0 \cdots r$, které se poprvé objevují v trojúhelníku ve vývojovém roce l.
Pro $\quad l = 0, ..., j$ máme multiplikativní model

$$Y^l_{s,j+1,k} = Y^l_{s,j,k}\left(1 + (d_j - 1)\tilde{E}^l_{s,j+1,k}\right), \tag{2}$$

kde $\tilde{E}^l_{s,j,k}$ mají pro stejné j, k, l stejný druhý a třetí moment, jsou nezávislé na $Y^j_{s,j,k}$ a mají střední hodnotu rovnu 1.
Pro $Y^j_{s,j,k}$ předpokládáme, že mají střední hodnotu m_s a rozptyl s^2_s.

Model pro celkové škody

Kumulativní škodní úhrn

$$X_{s,j} = \sum_{l=0}^{j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j}} Y_{s,j,k}^{l}, \quad j = 0, \cdots, r. \tag{3}$$

Rozklad na škody již známé a škody, které s v trojúhelníku objevují ve vývojovém roce $j+1$ poprvé

$$X_{s,j+1} = \sum_{l=0}^{j+1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j+1}} Y_{s,j+1,k}^{l} = \sum_{l=0}^{j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j}} Y_{s,j+1,k}^{l} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j+1}} Y_{s,j+1,k}^{j+1} =$$

$$= \sum_{l=0}^{j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j}} Y_{s,j,k}^{l} (1 + (d_j - 1)\tilde{E}_{s,j+1,k}^{l}) + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j+1}} Y_{s,j+1,k}^{j+1}.$$

Model pro celkové škody

Nechť $I_{s,j}$ je informace o veškerých škodách z roku s dostupnou ve vývojovém roce j, $N_{s,j}, Y^{l}_{s,j,k}, \quad l = 0, ..., j, k = 1, ..., \tilde{N}_{s,l}$.

$$E[X_{s,j+1}|I_{s,j}] = d_j X_{s,j} \ + \ b_{s,j} N_{s,j} m_s$$

$$E[X^2_{s,j+1}|I_{s,j}] = d_j^2 X^2_{s,j} + (d_j^{(2)} - d_j^2) X^{(2)}_{s,j} +$$
$$+2 X_{s,j} d_j b_{s,j} N_{s,j} m_s + b_{s,j} N_{s,j} m_s^{(2)} + b^2_{s,j} N^2_{s,j} m^2_s,$$

kde

$$d_j^{(2)} = E\left[1 + (d_j - 1)\tilde{E}_s^{j+1}\right]^2,$$

a

$$X^{(2)}_{s,j} = \sum_{l=0}^{j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,l}} (Y^{l}_{s,j+1,k})^2.$$

Porovnání s modelem pro kumulativní škody (Mandl)

Model bez informace o jednotlivých škodách

$$X_{s,j+1} = X_{s,j}\left(1 + (c_j - 1)E_{s,j+1}\right).$$

Model při informaci o jednotlivých škodách

$$X_{s,j+1} = \sum_{l=1}^{j}\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j}} Y^{l}_{s,j,k}(1 + (d_j - 1)\tilde{E}^{l}_{s,j+1,k}) + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j+1}} Y^{j+1}_{s,j+1,k}.$$

Dodatečný předpoklad $\tilde{E}^{l}_{s,j+1,k}$ nezávisí na k a l dává

$$X_{s,j+1} = (1 + (d_j - 1)\tilde{E}_{s,j+1})X_{s,j} + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j+1}} Y^{j+1}_{s,j+1,k}.$$

Porovnání s modelem pro kumulativní škody (Mandl)

Porovnáním máme

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,j+1}} Y_{s,j+1,k}^{j+1} = X_{s,j}\left[(c_j - 1)E_s^{j+1} - (d_j - 1)\tilde{E}_s^{j+1}\right].$$

Aplikací střední hodnoty plyne za podmínky $I_{s,j}$ máme

$$b_{s,j}N_{s,j}m_s = X_{s,j}(c_j - d_j),$$

neboli

$$c_j = \frac{b_{s,j}N_{s,j}m_s}{X_{s,j}} + d_j.$$

Rezerva bez rizikové přirážky

Rekurzí se ukáže

$$E[X_{t-j,r}|I_{t-j,j}] = D_{j,r-1}X_{t-j,j} \; + \; \bar{A}_{t-j}N_{t-j,j},$$

kde

$$D_{j,r-1} = d_{r-1}...d_j,$$

$$\bar{A}_{t-j,r-1} = \sum_{k=j}^{r-1} D_{k+1,r-1}A_{t-j,k}, \quad D_{r,r-1} := 1,$$

kde

$$A_{t-j,i} = m_{t-j}b_{t-j,i}\prod_{k=j}^{i-1}(1+b_{t-j,k}).$$

$$Res_t = \sum_{j=0}^{r-1} X_{t-j,j}(d_j...d_{r-1}-1) + \sum_{j=0}^{r-1} \bar{A}_{t-j,r-1}N_{t-j,j}. \qquad (4)$$

Rezerva s rizikovou přirážkou

$$Res_t = \sum_{j=0}^{r-1} E[X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j} | \Delta] + z_\alpha \sqrt{\mathrm{Var}\left(\sum_{j=0}^{r-1} (X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j}) | \Delta \right)} .$$

Nezávislost řádků trojúhelníka dává

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{j=0}^{r-1} (X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j}) | \Delta \right) = \sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{Var}\left(X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j} | I_{t-j,j} \right) ,$$

$$\mathrm{Var}\left(X_{t-j,\infty} - X_{t-j,j} | I_{t-j,j} \right) = \mathrm{Var}\left(X_{t-j,\infty} | I_{t-j,j} \right) = \mathrm{Var}\left(X_{t-j,r} | I_{t-j,j} \right) =$$

$$= E[X^2_{t-j,r} | I_{t-j,j}] - \left(E[X_{t-j,r} | I_{t-j,j}] \right)^2 .$$

Rezerva s rizikovou přirážkou

$$Res_t = \sum_{j=0}^{r-1} \left[x_{t-j,j}(d_j \cdots d_{r-1} - 1) + N_{t-j,j}\bar{A}_{t-j} \right] +$$

$$+ z_\alpha \sqrt{\sum_{j=0}^{r-1} \mathrm{Var}[X_{t-j,r} | I_{t-j,r}]},$$

$$\mathrm{Var}[X_{t-j,r}|I_{t-j,j}] = X_{t-j,j}^2 D_{j,r-1}^2 + X_{t-j,j} N_{t-j,j} \tilde{H}_{t-j,j,i}^{(1)} + N_{t-j,j}^2 \tilde{H}_{t-j,j,i}^{(2)} +$$

$$+ N_{t-j,j} \tilde{H}_{t-j,j,i}^{(3)} + X_{t-j,j}^{(2)} \tilde{H}_{t-j,j,i}^{(4)}, \quad X_{s,j}^{(2)} = \sum_{l=0}^{j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{s,l}} (Y_{s,j,k}^l)^2,$$

kde $\tilde{H}_{t-j,j,i}^{(1)}$, $\tilde{H}_{t-j,j,i}^{(2)}$, $\tilde{H}_{t-j,j,i}^{(3)}$ a $\tilde{H}_{t-j,j,i}^{(4)}$ se zkládají pouze z deterministických parametrů.

Volné prostředky

Riziková rezerva na konci roku $t+1$

$$U_{t+1} = u_t F + B_{t+1} + FRes_t - Res_{t+1} - GPmt_{t+1},$$

kde platby za škody v roce $t+1$ jsou

$$Pmt_{t+1} = X_{t+1,0} + \sum_{j=1}^{r-1} \left(X_{t+1-j,j} - X_{t+1-j,j-1}\right) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t+1-r,r-1}} Y^{l}_{t+1-r,r-1,k} \tilde{E}^{l}_{t+1-r,r,k} (d_{r-1} - 1).$$

Volné prostředky

Po úpravě máme

$$U_{t+1} = u_t F + B_{t+1} + \sum_{j=0}^{r-1} X_{t-j,j} \left[(D_j - 1)F + G\right] -$$

$$- \sum_{j=0}^{r-1} X_{t+1-j,j} \left[D_j - 1 + G\right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1} N_{t-j,j} \bar{A}_{t-j} F - \sum_{j=0}^{r-1} N_{t+1-j,j} \bar{A}_{t+1-j} -$$

$$-G \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t+1-r,r-1}} Y^l_{t+1-r,r-1,k} \left(1 + \tilde{E}^l_{t+1-r,r,k}(d_{r-1} - 1)\right).$$

Volné prostředky

Střední hodnota

$$EU_{t+1} = u_t F + B_{t+1} + \sum_{j=0}^{r-1} EX_{t-j,j}\left[(D_j - 1)F + G\right] -$$

$$-\sum_{j=0}^{r-1} EX_{t+1-j,j}\left[D_j - 1 + G\right] +$$

$$+\sum_{j=0}^{r-1} EN_{t-j,j}\bar{A}_{t-j}F - \sum_{j=0}^{r-1} EN_{t+1-j,j}\bar{A}_{t+1-j} -$$

$$-Gd_{r-1}\sum_{l=0}^{r-1} E\tilde{N}_{t+1-r,r-1}EY^{l}_{t+1-r,r-1,k}.$$

Volné prostředky

Centrovaná veličina

$$\overline{U}_{t+1} = \sum_{j=0}^{r-1} \overline{X}_{t-j,j} \left[(D_j - 1)F + G\right] - \sum_{j=0}^{r-1} \overline{X}_{t+1-j,j} \left[D_j - 1 + G\right] +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1} \overline{N}_{t-j,j} \bar{A}_{t-j} F - \sum_{j=0}^{r-1} \overline{N}_{t+1-j,j} \bar{A}_{t+1-j} - G\overline{X}_{t+1-r,r-1} -$$

$$-G(\sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t+1-r,r-1}} Y^{l}_{t+1-r,r-1,k} \left(1 + (d_{r-1})\tilde{E}^{l}_{t+1-r,r,k}\right) -$$

$$-d_{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} E\tilde{N}_{t+1-r,r-1} EY^{l}_{t+1-r,r-1,k}).$$

Volné prostředky

Střední hodnoty se dosadí dle

$$EX_{s,j+1} = d_j EX_{s,j} + b_{s,j} m_s EN_{s,j},$$

$$E\overline{X}^2_{s,j+1} = d_j^2 E\overline{X}^2_{s,j} + EX^{(2)}_{s,j}(d_j^{(2)} - d_j^2) + b_{s,j} EN_{s,j} m_s^{(2)} + b^2_{s,j} m_s^2 E\overline{N}^2_{s,j}.$$

$$EN_{s,j+1} = (1 + b_{s,j}) EN_{s,j},$$

$$E\overline{N}^2_{s,j+1} = b_{s,j} EN_{s,j} + (1 + b_{s,j})^2 E\overline{N}^2_{s,j}.$$

Jednokrokový model

$$\overline{U}_1 = -\sum_{j=0}^{r-1} \overline{X}_{1-j,j}(D_j - 1 + G) - \sum_{j=0}^{r-1} \overline{N}_{1-j,j}\bar{A}_{1-j} -$$

$$-G\sum_{l=0}^{r-1} \sum_{k=1}^{\tilde{n}_{1-r,r-1,k}} y^l_{1-r,r-1,k}\left[\left(1 + (d_{r-1} - 1)\tilde{E}^l_{1-r,r-1,k}\right) - d_{r-1}\right],$$

NP2 aproximace

$$0 = EU_1 - z_{0.995}\sqrt{E\overline{U}_1^2} + \frac{E\overline{U}_1^3}{6E\overline{U}_1^2}(z^2_{0.995} - 1),$$

Jednokrokový model

$$E\overline{U}_1^2 = \sum_{j=0}^{r-1}[D_j - 1 + G]^2 E\overline{X}^2_{1-j,j} + \sum_{j=0}^{r-1}\bar{A}^2_{1-j}E\overline{N}^2_{1-j,j} +$$

$$+G^2\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{n_{1-r,r-1}}(y^l_{1-r,r-1})^2\left(d^{(2)}_{r-1} - d^2_{r-1}\right).$$

$$\overline{U}_1^3 = -\sum_{j=0}^{r-1}[D_j - 1 + G]^3 E\overline{X}^3_{1-j,j} - \sum_{j=0}^{r-1}\bar{A}^3_{1-j}E\overline{N}^3_{1-j,j} -$$

$$-G^3\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{n_{1-r,r-1}}(y^l_{1-r,r-1})^3\left(d^{(3)}_{r-1} + 2(d_{r-1})^3 - 3d^{(2)}_{r-1}d_{r-1}\right).$$

XL-zajištění

Čisté škody při neomezeném XL-zajištění s prioritou a

$$\tilde{Y}^{l}_{s,j,k} = \min(Y^{l}_{s,j,k}, a_s).$$

Rezerva bez přirážky pro obezřetnost

$$Res_t = \sum_{j=0}^{r} E[\tilde{X}_{t-j,r} | I_{t-j,j}].$$

$$E[\tilde{X}_{t-j,r} | I_{t-j,j}] = E\left[\sum_{l=0}^{j} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t-j,l}} \min(Y^{l}_{t-j,r,k}, a_{t-j}) \middle| I_{t-j,j}\right] +$$

$$+E\left[\sum_{l=j+1}^{r} \sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t-j,l}} \min(Y^{l}_{t-j,r,k}, a_{t-j}) \middle| I_{t-j,j}\right].$$

Rezerva pro škody již známé

$$E\left[\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t-j,l}}\min(Y^{l}_{t-j,r,k},a_{t-j})\Big|I_{t-j,j}\right]=$$

$$=\sum_{l=0}^{j}\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t-j,l}}E\left[\min\left(Y^{l}_{t-j,j,k}\prod_{i=j}^{r-1}\left(1+(d_i-1)\tilde{E}^{l}_{t-j,i+1,k}\right),a_{t-j}\right)\Big|I_{t-j,j}\right],$$

n-tá střední hodnota výrazu v sumě:

$$E\left[K_{j,r-1}(Y^{l}_{1-j,j,k},a_{1-j})\right]^{n}=$$

$$=(Y^{l}_{1-j,j-1,k})^{n}E_{\tilde{E}}\left[\min\left(\prod_{i=j-1}^{r-1}\left(1+(d_i-1)\tilde{E}^{l}_{1-j,i+1,k}\right),\frac{a_{1-j}}{Y^{l}_{1-j,j-1,k}}\right)\right]^{n}$$

Rezerva pro škody již známé

Člen

$$E\left[\min\left(\prod_{i=i_1}^{i_2}\left(1+(d_i-1)\tilde{E}_{i+1}\right),a\right)\right]^n,$$

odhadneme přiblížením veličiny $\prod_{i=i_1}^{i_2}\left(1+(d_i-1)\tilde{E}_{i+1}\right)$ veličinou X s logaritmicko-normálním rozdělením.

$$E\left[\min(X,a)\right]^n=\exp\left(n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}\right)\Phi\left(\frac{\log(a)-\mu-n\sigma^2}{\sigma}\right)+$$

$$+a^n\left(1-\Phi\left(\frac{\log(a)-\mu}{\sigma}\right)\right),$$

Rezerva pro škody ještě neznámé

$$E\left[\sum_{l=j+1}^{r}\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{t-j,l}}\min(Y^{l}_{t-j,r,k},a_{t-j})\middle|I_{t-j,j}\right]=$$

$$=N_{t-j,j}\sum_{l=j+1}^{r}b_{t-j,l-1}\prod_{i=j}^{l-2}(1+b_{t-j,i})E\left[\min\left(Y^{l}_{t-j,r,k},a_{t-j}\right)\right].$$

Střední hodnotu zjednodušíme ($l=j+1,j+2,\dots$)

$$E\left[\min\left(Y^{l}_{t-j,r,k},a_{t-j}\right)\right]=$$

$$=E\left[\min\left(Y^{l}_{t-j,l,k}\prod_{i=l}^{r-1}\left(1+(d_i-1)\tilde{E}^{l}_{t-j,i+1,k}\right),a_{t-j}\right)\right],$$

Rezerva pro škody ještě neznámé

Součin ve střední hodnotě přiblížíme jeho střední hodnotou

$$E\left[\min\left(Y^{l}_{t-j,l,k}D_{l,r-1},a_{t-j}\right)\right],$$

což je rovno

$$D_{l,r-1}E\left[\min\left(Y^{l}_{t-j,l,k},\frac{a_{t-j}}{D_{l,r-1}}\right)\right].$$

Zanedbáváme tedy stochasticitu vývojových faktorů u škod, které se v trojúhelníku teprve objeví.

Zajistný efekt

Zajistný efekt při XL, resp. SL zajištění je funkce

$$r_X(a) = \frac{E\tilde{X}}{EX} = \frac{E[min(X,a)]}{EX}, \tag{5}$$

kde X je náhodná veličina označující jednotlivé škody, resp. roční úhrn škod, a a je priorita zajištění.

Škody ještě neznámé:

$$r_{Y^l_{t-j,r}}(a_{t-j}) = \frac{E\left[\min\left(Y^l_{t-j,r,k}, a_{t-j}\right)\right]}{E[Y^l_{t-j,r,k}]} \sim$$

$$\sim \frac{E\left[\min\left(Y^l_{t-j,l,k}, \frac{a_{t-j}}{D_{l,r-1}}\right)\right]}{E[Y^l_{t-j,l,k}]} = r_{Y^l_{t-j,l}}\left(\frac{a_{t-j}}{D_{l,r-1}}\right).$$

Jednokrokový model

$$\overline{U}_1 = -\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{j}\left[\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{1-j,l}}\left(K_{j,r-1}(Y^l_{1-j,j,k},a_{1-j}) + G\min\left(Y^l_{1-j,j,k},a_{t+1-j}\right)\right)\right.$$

$$\left.-E\tilde{N}_{1-j,l}E\left[K_{j,r-1}(Y^l_{1-j,j,k},a_{1-j}) + G\min\left(Y^l_{1-j,j,k},a_{1-j}\right)\right]\right]-$$

$$-\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{l=j+1}^{r}\overline{N}_{1-j,j}\tilde{b}^{D,a}_{1-j,j,l-1}-$$

$$-G\sum_{l=0}^{r-1}\left[\sum_{k=1}^{\tilde{N}_{1-r,l}}\min\left(Y^l_{1-r,r-1,k}(1+(d_{r-1}-1)\tilde{E}^l_{1-r,r,k}),a_{1-r}\right)-\right.$$

$$\left.-E\tilde{N}_{1-r,l}E\left[\min\left(y^l_{1-r,r-1,k}(1+(d_{r-1}-1)\tilde{E}^l_{1-r,r,k}),a_{1-r}\right)\right]\right],$$

Odhad parametrů b_j

$$\hat{b}_j = \frac{\sum_{s=t-r}^{t-j} \tilde{N}_{s,j+1}}{\sum_{s=t-r}^{t-j} N_{s,j}} = \sum_{s=t-r}^{t-j} \left(\frac{N_{s,j}}{\sum_{\tilde{s}=t-r}^{t-j} N_{\tilde{s},j}} \right) \frac{\tilde{N}_{s,j+1}}{N_{s,j}}$$

je nestranným odhadem parametru b_j. Navíc má odhad $\hat{b}_j$ nejmenší rozptyl za podmínky $\{N_{s,j}, s = t - r, ..., t - j\}$ mezi nestrannými lineárními odhady tvaru

$$\tilde{b}_j = \sum_{s=t-r}^{t-j} a_s \frac{\tilde{N}_{s,j+1}}{N_{s,j}}, \quad \sum_{s=t-r}^{t-j} a_s = 1,$$

kde a_s nezávisí na $\tilde{N}_{s,j+1}$.

Odhad parametrů d_j

Převedením modelu

$$Y^l_{s,j+1,k} = Y^l_{s,j,k}(1 + (d_j - 1)\tilde{E}_{s,j+1}), \quad l = 0, ..., j,$$

na tvar

$$\ln\left(\frac{Y^l_{s,j+1,k} - Y^l_{s,j,k}}{Y^l_{s,j,k}}\right) = \ln(d_j - 1) + \ln\tilde{E}_{s,j+1},$$

dostáváme pro $j = 0, ..., r - 1, l = 0., , , .j$ tvar lineární regrese

$$y^l_{s,j+1,k} = a_j x + e_{s,j+1}, \quad E\tilde{e}_{s,j+1} = 0.$$

Odhad parametrů d_j

Z teorie lineární regrese a zpětnou transformací dostáváme odhad

$$\hat{d}_j = 1 + e^{\hat{a}_j} = 1 + \prod_{s=t-r}^{t-j} \prod_{l=1}^{j} \prod_{k=1}^{\tilde{N}_{sl}} \left(\frac{Y^l_{s,j+1,k} - Y^l_{s,j,k}}{Y^l_{s,j,k}} \right)^{\frac{1}{(r-j)\prod_{l=1}^{j} \tilde{N}_{sl}}} .$$

Přirozeným odhadem pro $d_j - 1$ je tedy geometrický průměr jednotlivých vývojových faktorů.

Otevřené otázky

- Odvození třetích momentů pro NP2-aproximaci
- Více obchodních odvětví, korelace mezi nimi
- Koncové faktory
- Další zajištění: Stop Loss, podíly na zisku či ztrátě, retrospektivní smlouvy, ...
- Vliv měnících se parametrů zajištění v čase ve srovnání s modely založenými na čistých škodách
- Vliv zjednodušení pomocí NP2-aproximace, a aproximací pro XL-zajištění
- Optimalizace zajistného programu

Závěr

Výhody modelu při informaci o jednotlivých škodách

- Model umožňuje zohlednění zajištění
- Model není v rozporu s chain ladder
- Snadná interpretace parametrů
- Možnost zvolení odlišných parametrů při dodatečné informaci
- Parametry různých pojišťoven lze porovnat
- Uzavřené vzorce, možná aplikace v Excelu

Nevýhody modelu

- Velké množství parametrů
- Vyžaduje informaci o celém vývoji jednotlivých škod

[England & Verrall, 1997] England, D. Peter, Verrall J. Richard.
A flexible framework for stochastic claims reserving,
PCAS, LXXXVIII, 2001.

[Mack, 1997] Mack, Thomas.
Schadenversicherungsmathematik,
Münchner Rück, VVW Karlsruhe, 1997.

[Mandl, 2005] Mandl, Petr.
Kvantifikace obezřetnosti ve škodních rezervách neživotního pojištění,
Sborník ze semináře z aktuárských věd 2004/2005, MatfyzPress.

[Trchová, 2006] Trchová, Radka.
Solvency II a zajištění v neživotní pojišťovně,
Sborník ze semináře z aktuárských věd 2005/2006, MatfyzPress.