Modelování rezervního fondu neživotního pojištění

Iva Justová

Seminář z aktuárských věd, MFF UK

16. května 2008

Osnova

Historie

Československo – rezervní fond

- Vyhláška č. 977 z roku 1948
  - Rezervní fond určen k úhradě ztrát (ŽP, NP)
  - Doplnění rezervního fondu o úroky a podíly na přebytcích
  - Horní mez 100% (50%) prémie (riziková/ostatní odvětví)
- Statut Státní pojišťovny (1961)
  - Rezervní fond určen ke krytí závazků z pojištění, nestačí-li příjmy běžného roku
  - Horní mez 400 mil. Kčs, příděly 50% čistého zisku

Německo, Finsko – vyrovnávací rezerva

- Dlouholetá historie používání
- Vyrovnávací rezerva zvlášť pro specifická pojistná odvětví

Historie

Československo – rezervní fond

- Vyhláška č. 977 z roku 1948
  - Rezervní fond určen k úhradě ztrát (ŽP, NP)
  - Doplnění rezervního fondu o úroky a podíly na přebytcích
  - Horní mez 100% (50%) prémie (riziková/ostatní odvětví)
- Statut Státní pojišťovny (1961)
  - Rezervní fond určen ke krytí závazků z pojištění, nestačí-li příjmy běžného roku
  - Horní mez 400 mil. Kčs, příděly 50% čistého zisku

Německo, Finsko – vyrovnávací rezerva

- Dlouholetá historie používání
- Vyrovnávací rezerva zvlášť pro specifická pojistná odvětví

Výkyvová rezerva

Cílem je zachování rovnováhy mezi pojistným a pojistným plněním z pohledu několika let → cyklická rizika

- Často omezení pouze na výkyvy ve škodách (oddělit)
- Vhodný nástroj k řízení výstupů obchodu – udržení technického zisku/ztráty v určitém pásmu
- Snížení potřeby zajištění
- Snížení výplat dividend z neočekávaných technických zisků

- Funkce
  - Dodatečné prostředky ke krytí technických ztrát
  - Vyrovnávání rizik v čase
- Pravidla obsluhy
  - Transfery prostředků z a do rezervy (T_n)
  - Přípustné limity - dolní a horní mez (M_n, C_n)

Výkyvová rezerva

Cílem je zachování rovnováhy mezi pojistným a pojistným plněním z pohledu několika let $\rightarrow$ cyklická rizika

- Často omezení pouze na výkyvy ve škodách (oddělit)
- Vhodný nástroj k řízení výstupů obchodu – udržení technického zisku/ztráty v určitém pásmu
- Snížení potřeby zajištění
- Snížení výplat dividend z neočekávaných technických zisků

- Funkce
  - Dodatečné prostředky ke krytí technických ztrát
  - Vyrovnávání rizik v čase
- Pravidla obsluhy
  - Transfery prostředků z a do rezervy (T_n)
  - Přípustné limity - dolní a horní mez (M_n, C_n)

Výkyvová rezerva

- Směrnice Rady č. 73/239/EHS (87/343/EHS)
  - Pojištění úvěru a záruky
  - Pojistné $\geq$ 2,5 mil. EUR nebo $\geq$ 4% celkového pojistného
  - P_n zasloužené pojistné, CS_n celkové škody, $Q_n = CS_n/P_n$, $q_n = \widehat{EQ_n}$, $s_n^2 = \widehat{\mathrm{Var} Q_n}$, odhady dle 15–30 let

1. metoda: $T_n = \min\{0{,}75(P_n - CS_n), 0{,}12P_n\}$ pro $P_n > CS_n$, jinak $T_n = P_n - CS_n$, $M_n = 0$, $C_n = 1{,}5 \max\{P_{n-1}, \dots, P_{n-5}\}$
2. metoda: $T_n = 0{,}75(P_n - CS_n)$ pro $P_n > CS_n$, jinak $T_n = P_n - CS_n$, $M_n = 0$, $C_n = 0{,}268(P_{n-1} + \dots + P_{n-5})$
3. metoda: $M_n = 0$, $C_n = 6s_nP_n$, $T_n = (q_n - Q_n)P_n + 0{,}21s_nP_n$
4. metoda: $M_n = 3s_nP_n$, $C_n = 6s_nP_n$, $T_n = (q_n - Q_n)P_n$

  - 3. a 4. metoda – zohlednění nákladové přirážky v pojistném (DE)

- Směrnice řadí vyrovnávací rezervu mezi TR $\rightarrow$ závazek
- Dle IAS nejde o současný závazek $\rightarrow$ součást vlastního kapitálu

Výkyvová rezerva

- Směrnice Rady č. 73/239/EHS (87/343/EHS)
  - Pojištění úvěru a záruky
  - Pojistné $\geq$ 2,5 mil. EUR nebo $\geq$ 4% celkového pojistného
  - P_n zasloužené pojistné, CS_n celkové škody, $Q_n = CS_n/P_n$, $q_n = \widehat{EQ_n}$, $s_n^2 = \widehat{\mathrm{Var}Q_n}$, odhady dle 15–30 let

1. metoda: $T_n = \min\{0{,}75(P_n - CS_n), 0{,}12P_n\}$ pro $P_n > CS_n$, jinak $T_n = P_n - CS_n$, $M_n = 0$, $C_n = 1{,}5\max\{P_{n-1}, \dots, P_{n-5}\}$
2. metoda: $T_n = 0{,}75(P_n - CS_n)$ pro $P_n > CS_n$, jinak $T_n = P_n - CS_n$, $M_n = 0$, $C_n = 0{,}268(P_{n-1} + \dots + P_{n-5})$
3. metoda: $M_n = 0$, $C_n = 6s_nP_n$, $T_n = (q_n - Q_n)P_n + 0{,}21s_nP_n$
4. metoda: $M_n = 3s_nP_n$, $C_n = 6s_nP_n$, $T_n = (q_n - Q_n)P_n$

  - 3. a 4. metoda – zohlednění nákladové přirážky v pojistném (DE)

- Směrnice řadí vyrovnávací rezervu mezi TR $\rightarrow$ závazek
- Dle IAS nejde o současný závazek $\rightarrow$ součást vlastního kapitálu

Předpoklady modelu

- Abstrahujeme od nákladů i nákladové přirážky v pojistném
- Neuvažujeme časovou hodnotu peněz
- Uvažujeme pouze rizika spojená s výkyvy ve škodách v rámci jednoho odvětví

Rozklad technického zisku/ztráty

- Rozdíl mezi zaslouženým pojistným a celkovými škodami
- Pojistné riziko – riziko nastání technické ztráty
- Zasloužené pojistné $= \widehat{EX_n}(1 + l_n)$, $P_n = \widehat{EX_n}$ zasloužené ryzí pojistné, l_n zisková přirážka, $P_n l_n$ očekávaný zisk/ztráta
- l_n determinována trhem, obchodní strategií, ...

Předpoklady modelu

- Abstrahujeme od nákladů i nákladové přirážky v pojistném
- Neuvažujeme časovou hodnotu peněz
- Uvažujeme pouze rizika spojená s výkyvy ve škodách v rámci jednoho odvětví

Rozklad technického zisku/ztráty

- Rozdíl mezi zaslouženým pojistným a celkovými škodami
- Pojistné riziko – riziko nastání technické ztráty
- Zasloužené pojistné $= \widehat{EX_n}(1 + l_n)$, $P_n = \widehat{EX_n}$ zasloužené ryzí pojistné, l_n zisková přirážka, $P_n l_n$ očekávaný zisk/ztráta
- l_n determinována trhem, obchodní strategií, ...

Rozklad technického zisku

Celkové škody vzniklé v roce n označíme X_n

- Technický zisk/ztráta vztahující se k roku n

$$TZ_n = P_n(1 + I_n) - X_n = (1 + I_n - Z_n)P_n, \qquad Z_n = \frac{X_n}{P_n}$$

- Modelování pomocí upraveného škodného poměru Z
- Předpoklady
  - Z_n nezávislé, stejně rozdělené, $EZ = 1$, $\sigma_Z = \sqrt{\mathrm{Var} Z}$
  - Pozorování $Z_0, \ldots, Z_{-k}$ a $P_0, \ldots, P_{-k} \to$ odhad σ_Z
  - $\mathrm{Var} Z = \mathrm{Var} \frac{X}{EX}$ je variační koeficient X
  - $P_n,\ I_n,\ n = 1, \ldots$ považujeme za nenáhodné
  - $Z \sim LN(\mu, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \ln(\sigma_Z^2 + 1), \quad \mu = -\ln(\sigma_Z^2 + 1)/2$
- Modelování výkyvů ročních škod podle data vzniku

Rozklad technického zisku

Celkové škody vzniklé v roce n označíme X_n

- Technický zisk/ztráta vztahující se k roku n

$$TZ_n = P_n(1 + I_n) - X_n = (1 + I_n - Z_n)P_n, \qquad Z_n = \frac{X_n}{P_n}$$

- Modelování pomocí upraveného škodného poměru Z
- Předpoklady
  - Z_n nezávislé, stejně rozdělené, $EZ = 1$, $\sigma_Z = \sqrt{\mathrm{Var} Z}$
  - Pozorování $Z_0, \ldots, Z_{-k}$ a $P_0, \ldots, P_{-k} \rightarrow$ odhad σ_Z
  - $\mathrm{Var} Z = \mathrm{Var} \frac{X}{EX}$ je variační koeficient X
  - $P_n,\ I_n,\ n = 1, \ldots$ považujeme za nenáhodné
  - $Z \sim LN(\mu, \sigma^2), \quad \sigma^2 = \ln(\sigma_Z^2 + 1), \quad \mu = -\ln(\sigma_Z^2 + 1)/2$
- Modelování výkyvů ročních škod podle data vzniku

Rozklad technického zisku

Skutečné celkové škody v roce n obsahují škody nahlášené v roce n a změnu rezerv na pojistná plnění

- Skutečný technický zisk/ztráta v roce n

$$TZ'_n = (1 + I_n - Z_n^1)P_n + \sum_{j=1}^{r-1}(Z_{n-j}^j - Z_{n-j}^{j+1})P_{n-j}$$

- Z_{n-j}^i je odhad Z_{n-j} na základě informace za i období
- Vliv škod vzniklých v minulosti
- Pozorování $Z_0^1, Z_{-1}^2, \ldots, Z_{-r+2}^{r-1}, Z_{-r+1}, \ldots, Z_{-k}$

  $\longrightarrow$ průběžná aktualizace
- Z pohledu více let $\sum_n TZ'_n = \sum_n (1 + I_n - Z_n)P_n$
- Předpoklad
  - Odhadované hodnoty odpovídají skutečným ($Z_n^j = Z_n$, $TZ'_n = TZ_n$)
  - Neuvažujeme riziko rezerv

Rezervní fond (RF)

- Část technického zisku zadržena v podobě RF
- Technická ztráta hrazena z RF
- Stav RF na konci období n

$$F_n = g_n(F_{n-1} + T_n), \qquad g_n(x) = \max(M_n, \min(x, C_n))$$

- Tvorba/čerpání RF T_n (funkce Z_n), skutečný přírůstek $F_n - F_{n-1}$
- K použití mimo odvětví (dividendy) $(1 + I_n - Z_n)P_n - F_n + F_{n-1}$
- $\{F_n\}$ Markovský proces s diskrétním časem a nezávislými přírůstky (T_n nezávislé)
- Při daném F_n nezávisí budoucí vývoj $\{F_{n+k}, k > 0\}$ na minulém vývoji $\{F_{n-k}, k > 0\}$
- $M_n = 0$, $C_n \to$ teorie řízených Markovských řetězců

Obsah

Úvod

- U_n – stav systému v čase n, $\quad n = 0, 1, \ldots$
- $P(U_{n+1} \leq x \mid U_n = y) = F_U(x|y;\xi), \quad x, y \in I$
- $\xi \in \Xi(y) \subset R^q$ – řídící parametr

- Volba řídícího parametru v čase n na základě minulých pozorování $\xi_n = \xi_n(u_0, \ldots, u_n)$
- Posloupnost $\omega = \{\xi_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ – řízení systému
- $\Xi_n = \xi_n(U_0, \ldots, U_n)$ – skutečná hodnota řídícího parametru

- $r(x|y;\xi)$ – výnos z přechodu z y do x při volbě ξ
- $R_n = \sum_{m=0}^{n-1} r(U_{m+1}|U_m;\Xi_m)$ – skutečný výnos během n přechodů

Stacionární řízení

- Je-li $\xi_n(u_0, \ldots, u_n) = \xi(u_n)$, $n = 0, 1, \ldots$, potom řízení ω se nazývá *stacionární řízení*, $\omega \sim \xi(y)$
- Posloupnost $\{U_n\}$ tvoří časově homogenní Markovův řetězec
- $F_U(x|y; \xi(y))$, $f_U(x|y; \xi(y))$
- Stacionární rozdělení veličiny U

$$f_U(x) = \int_I f_U(x|y; \xi(y)) f_U(y) dy, \quad x \in I, \quad \int_I f_U(x) dx = 1$$

- Střední výnos z jednoho přechodu při řízení $\omega \sim \xi(y)$

$$\Theta(\omega) = \int_I \int_I f_U(y) f_U(x|y; \xi(y)) r(x|y; \xi(y)) dx dy$$

- Stacionární řízení vedoucí k maximální hodnotě $\Theta(\omega)$ se nazývá *optimální stacionární řízení*, $\omega_0 \sim \xi_0(y)$

Stacionární řízení

- Je-li $\xi_n(u_0, \ldots, u_n) = \xi(u_n)$, $n = 0, 1, \ldots,$ potom řízení ω se nazývá *stacionární řízení*, $\omega \sim \xi(y)$
- Posloupnost $\{U_n\}$ tvoří časově homogenní Markovův řetězec
- $F_U(x|y; \xi(y))$, $f_U(x|y; \xi(y))$
- Stacionární rozdělení veličiny U

$$f_U(x) = \int_I f_U(x|y; \xi(y)) f_U(y) dy, \quad x \in I, \quad \int_I f_U(x) dx = 1$$

- Střední výnos z jednoho přechodu při řízení $\omega \sim \xi(y)$

$$\Theta(\omega) = \int_I \int_I f_U(y) f_U(x|y; \xi(y)) r(x|y; \xi(y)) dx dy$$

- Stacionární řízení vedoucí k maximální hodnotě $\Theta(\omega)$ se nazývá *optimální stacionární řízení*, $\omega_0 \sim \xi_0(y)$

Řízení rezervního fondu

- $F_n = g_n(F_{n-1} + T_n), \quad g_n(x) = \max(0, \min(x, C_n))$
- Řízení RF spočívá ve volbě horní meze C_n v čase n
- U_n – prostředky RF na počátku roku n zvýšené o zisk, resp. snížené o ztrátu během n-tého období
- $U_n = g_{n-1}(U_{n-1}) + T_n, \quad T_n = (1 + I - Z_n)P, \quad \xi_n = g_n(u_n)$
- $F_U(x|y; \xi_n) = F_T(x - \xi_n(y)), \quad \xi_n(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y, & y \in (0, C_n), \\ C_n, & y \ge C_n, \end{cases}$
- $f_U(x|y; \xi_n) = f_T(x - \xi_n(y)) = \frac{1}{P} f_Z(1 + I - \frac{x - \xi_n(y)}{P})$
- Je-li $C_n = C$, $n = 1, 2, \ldots$, představuje $\omega \sim \xi(y)$, $\xi(y) = \max(0, \min(y, C))$ stacionární řízení

Řízení rezervního fondu

- $F_n = g_n(F_{n-1} + T_n), \quad g_n(x) = \max(0, \min(x, C_n))$
- Řízení RF spočívá ve volbě horní meze C_n v čase n
- U_n – prostředky RF na počátku roku n zvýšené o zisk, resp. snížené o ztrátu během n-tého období
- $U_n = g_{n-1}(U_{n-1}) + T_n, \quad T_n = (1 + I - Z_n)P, \quad \xi_n = g_n(u_n)$
- $F_U(x|y;\xi_n) = F_T(x - \xi_n(y)), \quad \xi_n(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ y, & y \in (0, C_n), \\ C_n, & y \ge C_n, \end{cases}$
- $f_U(x|y;\xi_n) = f_T(x - \xi_n(y)) = \frac{1}{P} f_Z(1 + I - \frac{x - \xi_n(y)}{P})$
- Je-li $C_n = C,\ n = 1, 2, \ldots$, představuje $\omega \sim \xi(y)$, $\xi(y) = \max(0, \min(y, C))$ stacionární řízení

Optimální stacionární řízení

Zvyšování C

$\longrightarrow$ Posílení bezpečnostní funkce fondu

$\longrightarrow$ Přílišné zadržování prostředků $\rightarrow$ ušlý zisk

Dvourozměrná funkce výnosů z přechodu

$$r^1(x|y;\xi(y)) = \begin{cases} 1, & y > \xi(y), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad r^2(x|y;\xi(y)) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

- Skutečné výnosy $r(X|Y;\xi(Y)) = (\chi_{\{Y>\xi(Y)\}}, \chi_{\{X>0\}})$
- Celkové výnosy $R_n^i = \sum_{m=0}^{n-1} r^i(U_{m+1}|U_m;\xi(U_m)),\ i = 1, 2$
- R_n^1 – počet případů za n období, kdy část zisku byla využita i mimo odvětví $\rightarrow$ max
- R_n^2 – počet případů za n období, kdy nebylo potřeba dodávat prostředky z jiných odvětví $\rightarrow$ max

Optimální stacionární řízení

Zvyšování C

$\longrightarrow$ Posílení bezpečnostní funkce fondu

$\longrightarrow$ Přílišné zadržování prostředků $\rightarrow$ ušlý zisk

Dvourozměrná funkce výnosů z přechodu

$$r^1(x|y;\xi(y)) = \begin{cases} 1, & y > \xi(y), \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad r^2(x|y;\xi(y)) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$$

- Skutečné výnosy $r(X|Y;\xi(Y)) = (\chi_{\{Y>\xi(Y)\}}, \chi_{\{X>0\}})$
- Celkové výnosy $R_n^i = \sum_{m=0}^{n-1} r^i(U_{m+1}|U_m;\xi(U_m)),\ \ i = 1,2$
- R_n^1 – počet případů za n období, kdy část zisku byla využita i mimo odvětví $\rightarrow$ max
- R_n^2 – počet případů za n období, kdy nebylo potřeba dodávat prostředky z jiných odvětví $\rightarrow$ max

Volba optimálního C

- $\Theta^1(\omega) = E\chi_{\{Y>\xi(Y)\}} = 1 - F_U(C)$, $\Theta^2(\omega) = E\chi_{\{X>0\}} = 1 - F_U(0)$
- Optimální stacionární řízení $\omega_0 \sim \xi_0(y)$ je určeno takovým C, které vede k optimální kombinaci (Θ^1, Θ^2)

$U_n = y \rightarrow$ jakou část odvést mimo odvětví?

- $P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = y) \leq 1 - \epsilon$
  $\rightarrow$ Z důvodu bezpečnosti se nic neodvádí, $\xi_0(y) = \max(0, y)$
- $P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = y) > 1 - \epsilon$
  $\rightarrow$ Prostředky uvolníme do té míry, aby byla zachována požadovaná bezpečnost, $\xi_0(y) = C$
- $1-\epsilon = P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = C) = 1-F_T(-C) \rightarrow C = (z^Z_{1-\epsilon}-1-l)P$

Optimální stacionární řízení RF

- $\omega_0 \sim \xi_0(y)$, $\xi_0(y) = \max(0, \min(y, C))$, $C = (z^Z_{1-\epsilon} - 1 - l)P$

Volba optimálního C

- $\Theta^1(\omega) = E\chi_{\{Y>\xi(Y)\}} = 1 - F_U(C)$, $\Theta^2(\omega) = E\chi_{\{X>0\}} = 1 - F_U(0)$
- Optimální stacionární řízení $\omega_0 \sim \xi_0(y)$ je určeno takovým C, které vede k optimální kombinaci (Θ^1, Θ^2)

$U_n = y \rightarrow$ jakou část odvést mimo odvětví?

- $P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = y) \leq 1 - \epsilon$

  $\rightarrow$ Z důvodu bezpečnosti se nic neodvádí, $\xi_0(y) = \max(0, y)$
- $P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = y) > 1 - \epsilon$

  $\rightarrow$ Prostředky uvolníme do té míry, aby byla zachována požadovaná bezpečnost, $\xi_0(y) = C$
- $1-\epsilon = P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = C) = 1-F_T(-C) \;\rightarrow\; C = (z^Z_{1-\epsilon} - 1 - l)P$

Optimální stacionární řízení RF

- $\omega_0 \sim \xi_0(y)$, $\xi_0(y) = \max(0, \min(y, C))$, $C = (z^Z_{1-\epsilon} - 1 - l)P$

Volba optimálního C

- $\Theta^1(\omega) = E\chi_{\{Y>\xi(Y)\}} = 1 - F_U(C)$, $\Theta^2(\omega) = E\chi_{\{X>0\}} = 1 - F_U(0)$
- Optimální stacionární řízení $\omega_0 \sim \xi_0(y)$ je určeno takovým C, které vede k optimální kombinaci (Θ^1, Θ^2)

$U_n = y \rightarrow$ jakou část odvést mimo odvětví?

- $P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = y) \leq 1 - \epsilon$
  $\rightarrow$ Z důvodu bezpečnosti se nic neodvádí, $\xi_0(y) = \max(0, y)$
- $P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = y) > 1 - \epsilon$
  $\rightarrow$ Prostředky uvolníme do té míry, aby byla zachována požadovaná bezpečnost, $\xi_0(y) = C$
- $1-\epsilon = P(U_{n+1} \geq 0 \mid U_n = C) = 1-F_T(-C) \;\rightarrow\; C = (z^Z_{1-\epsilon}-1-l)P$

Optimální stacionární řízení RF

- $\omega_0 \sim \xi_0(y)$, $\xi_0(y) = \max(0, \min(y, C))$, $C = (z^Z_{1-\epsilon} - 1 - l)P$

Poznámky

1. Víceletý horizont při ověřování dostatečnosti prostředků RF
   - $P(\min_{k=1,\dots,N} F_{n+k} = 0 \mid F_n = C) = \alpha$
   - Aproximace $C \doteq \sqrt{N}(z^Z_{1-\alpha} - 1 - l)P$
2. Dolní mez a dotace M
   - $U_n = y < 0 \;\; \rightarrow \;\;$ potřeba dodat $-y$
   - Navíc možnost dotace M, $\quad P(U_{n+1} \geq 0 \mid \xi(U_n) = M) = 1 - \delta$
   - $1 - \delta$ – minimální hladina bezpečnosti
3. Velikost překročení 0 a horní meze
   - $r^1_a(x|y;\xi(y)) = (y - \xi(y))^+, \quad r^2_a(x|y;\xi(y)) = -(x)^-$
   - $\Theta^1_a(\omega) = E\{U - C \mid U > C\} \rightarrow \max$, $\Theta^2_a(\omega) = E\{U \mid U < 0\} \rightarrow \max$
   - Kritérium rozhodování – maximální tolerovaná výše přečerpání $E\{U_{n+1} \mid U_{n+1} \leq 0, \xi(U_n) = C\} = -u_\epsilon$

Poznámky

1. Víceletý horizont při ověřování dostatečnosti prostředků RF
   - $P(\min_{k=1,\dots,N} F_{n+k} = 0 \mid F_n = C) = \alpha$
   - Aproximace $C \doteq \sqrt{N}(z^Z_{1-\alpha} - 1 - l)P$
2. Dolní mez a dotace M
   - $U_n = y < 0 \ \rightarrow$ potřeba dodat $-y$
   - Navíc možnost dotace M, $\quad P(U_{n+1} \geq 0 \mid \xi(U_n) = M) = 1 - \delta$
   - $1 - \delta$ – minimální hladina bezpečnosti
3. Velikost překročení 0 a horní meze
   - $r^1_a(x|y;\xi(y)) = (y - \xi(y))^+, \quad r^2_a(x|y;\xi(y)) = -(x)^-$
   - $\Theta^1_a(\omega) = E\{U - C \mid U > C\} \rightarrow \max$, $\Theta^2_a(\omega) = E\{U \mid U < 0\} \rightarrow \max$
   - Kritérium rozhodování – maximální tolerovaná výše přečerpání $E\{U_{n+1} \mid U_{n+1} \leq 0, \xi(U_n) = C\} = -u_\epsilon$

Poznámky

1. Víceletý horizont při ověřování dostatečnosti prostředků RF
   - $P(\min_{k=1,\dots,N} F_{n+k} = 0 \mid F_n = C) = \alpha$
   - Aproximace $C \doteq \sqrt{N}(z^Z_{1-\alpha} - 1 - l)P$
2. Dolní mez a dotace M
   - $U_n = y < 0 \;\rightarrow\;$ potřeba dodat $-y$
   - Navíc možnost dotace M, $\quad P(U_{n+1} \geq 0 \mid \xi(U_n) = M) = 1 - \delta$
   - $1 - \delta$ – minimální hladina bezpečnosti
3. Velikost překročení 0 a horní meze
   - $r^1_a(x|y; \xi(y)) = (y - \xi(y))^+, \quad r^2_a(x|y; \xi(y)) = -(x)^-$
   - $\Theta^1_a(\omega) = E\{U - C \mid U > C\} \rightarrow \max$, $\Theta^2_a(\omega) = E\{U \mid U < 0\} \rightarrow \max$
   - Kritérium rozhodování – maximální tolerovaná výše přečerpání $E\{U_{n+1} \mid U_{n+1} \leq 0, \xi(U_n) = C\} = -u_\epsilon$

Nestacionární řízení RF

- $C = (z^Z_{1-\epsilon} - 1 - l)P, \quad Z \sim LN(-\ln(\sigma_Z^2 + 1)/2, \ln(\sigma_Z^2 + 1))$
- $z^Z_{1-\epsilon} = \exp\{\frac{-\ln(\sigma_Z^2+1)}{2} + \sqrt{\ln(\sigma_Z^2 + 1)} z_{1-\epsilon}\}$
- Závislost na sm. odch. $\omega \sim \xi(y, s), \; f_U(x|y; \xi, s) = f_U(x|y; \xi(y, s))$
- Optimální stacionární řízení $\omega_0 \sim \xi_0(y), \; \xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$
- Parametr σ_Z odhadujeme na základě minulých pozorování $\rightarrow$ nestacionární řízení

$$\omega = \{\xi_n, n = 0, 1, \dots\}, \quad \xi_n(u_0, \dots, u_n) = \xi(u_n, s_n(u_0, \dots, u_n))$$

Metoda maximální věrohodnosti

- $s_n = \arg\max_{s \in S} \prod_{m=0}^{n-1} f_U(u_{m+1}|u_m; \xi_m, s), \quad \xi_m = \xi(u_m, s_m)$
- $s_n(u_1, \dots, u_n) = s_n(z_1, \dots, z_n), \quad s_n \overset{as.}{\sim} \mathrm{N}(\sigma_Z, (nI(\sigma_Z))^{-1})$

Nestacionární řízení RF

- $C = (z^Z_{1-\epsilon} - 1 - l)P, \quad Z \sim LN(-\ln(\sigma_Z^2 + 1)/2, \ln(\sigma_Z^2 + 1))$
- $z^Z_{1-\epsilon} = \exp\{\frac{-\ln(\sigma_Z^2+1)}{2} + \sqrt{\ln(\sigma_Z^2 + 1)} z_{1-\epsilon}\}$
- Závislost na sm. odch. $\omega \sim \xi(y, s)$, $f_U(x|y; \xi, s) = f_U(x|y; \xi(y, s))$
- Optimální stacionární řízení $\omega_0 \sim \xi_0(y)$, $\xi_0(y) = \xi(y, \sigma_Z)$
- Parametr σ_Z odhadujeme na základě minulých pozorování $\rightarrow$ nestacionární řízení

$$\omega = \{\xi_n,\ n = 0, 1, \ldots\}, \quad \xi_n(u_0, \ldots, u_n) = \xi(u_n, s_n(u_0, \ldots, u_n))$$

Metoda maximální věrohodnosti

- $s_n = \arg\max_{s \in S} \prod_{m=0}^{n-1} f_U(u_{m+1}|u_m; \xi_m, s), \quad \xi_m = \xi(u_m, s_m)$
- $s_n(u_1, \ldots, u_n) = s_n(z_1, \ldots, z_n), \quad s_n \overset{as.}{\sim} \mathrm{N}(\sigma_Z, (nI(\sigma_Z))^{-1})$

Asymptotické vlastnosti řízení RF

- $\Xi_n = \xi(U_n, s_n(U_0, \ldots, U_n)) \longrightarrow \xi_0(U_n), \quad n \to \infty$
- $\omega = \{\xi_n,\ n = 0, 1, \ldots\}$ "se blíží k" $\omega_0 \sim \xi_0(y)$
- Pro výnosy R_n z nestacionárního řízení RF platí
- Věta 1.

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} R_n = \Theta(\omega_0) \quad \text{s.j.}$$

- Věta 2.

$$\frac{R_n - n\Theta(\omega_0)}{\sqrt{n}} \overset{\text{as.}}{\sim} \mathrm{N}(0, \zeta(\omega_0)), \quad \zeta(\omega_0) \text{ je konstanta}$$

$\longrightarrow$ Důkazy pomocí zákonu velkých čísel a centrální limitní věty pro martingaly a asymptotických vlastností MLE odhadů

Dosazování s_n do $\omega_0 \sim \xi_0(y)$

Závěr

- Postupné nahrazování σ_Z v rámci optimální strategie MLE odhadem vede k maximálním průměrným výnosům
- Výsledky nerozlišitelné od případu se znalostí σ_Z

Příklad

- $\sigma_Z = 0{,}2, \quad I = 0{,}1, \quad P = 1, \quad 1 - \epsilon = 0{,}995, \quad C = 0{,}5332$
- $r^{11}(x|y;\xi_0) = \begin{cases} 1, & x > C, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases} \qquad r^2(x|y;\xi_0) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak}, \end{cases}$
- $\Theta^1(\omega_0) = 1 - F_U(C) = 0{,}553, \quad \Theta^2(\omega_0) = 1 - F_U(0) = 0{,}969$
- $\zeta^{11}(\omega_0) = 0{,}640, \quad \zeta^2(\omega_0) = 0{,}065$

Dosazování s_n do $\omega_0 \sim \xi_0(y)$

Závěr

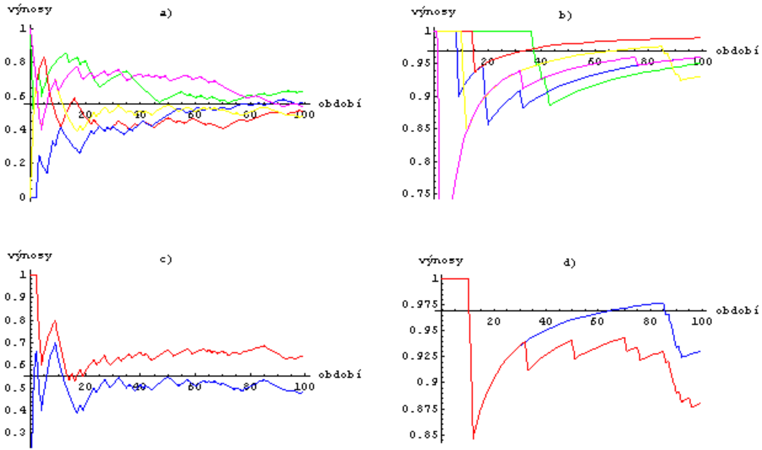
- Postupné nahrazování σ_Z v rámci optimální strategie MLE odhadem vede k maximálním průměrným výnosům
- Výsledky nerozlišitelné od případu se znalostí σ_Z

Příklad

- $\sigma_Z = 0{,}2, \;\; I = 0{,}1, \;\; P = 1, \;\; 1 - \epsilon = 0{,}995, \;\; C = 0{,}5332$
- $r^{11}(x|y;\xi_0) = \begin{cases} 1, & x > C, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases} \qquad r^2(x|y;\xi_0) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & \text{jinak,} \end{cases}$
- $\Theta^1(\omega_0) = 1 - F_U(C) = 0{,}553, \quad \Theta^2(\omega_0) = 1 - F_U(0) = 0{,}969$
- $\zeta^{11}(\omega_0) = 0{,}640, \quad \zeta^2(\omega_0) = 0{,}065$

Příklad – simulace

- Posloupnosti $\{Z_n, \; n = 1, \ldots, 100\}, \quad u_0 = C/2$



- Porovnání průměrných výnosů z nestacionárního řízení s průměrnými výnosy z optimálního stacionárního řízení

Modelování rezervního fondu

Předpoklady

- Jedno pojistné odvětví
- Upravené škodné poměry $Z \sim LN(\mu, \sigma^2)$ určené σ_Z
- P_n zasloužené ryzí pojistné v čase n
- l_n zisková přirážka v čase n ($l_n \geq 0$)

Obsah

1. Struktura rezervního fondu
2. Stacionární rozdělení rezervního fondu
3. Bezpečnostní funkce
4. Vyrovnávací funkce

Struktura RF

Stav fondu v čase n

$$F_n = g_n(F_{n-1} + T_n), \quad g_n(x) = \max(0, \min(x, C_n))$$

Pravidlo tvorby/čerpání fondu T_n

- Celkový zisk/ztráta $TZ_n = (1 - Z_n)P_n + I_nP_n$
- $Z_n < 1$
  - T_n = neočekávaný zisk + část očekávaného zisku
- $Z_n \geq 1$
  - Kompenzace neočekávané ztráty očekávanými zisky
  - Zisk $\rightarrow$ T_n = část celkového zisku
  - Ztráta $\rightarrow$ T_n = celková ztráta (-)

Struktura RF

$$T_n = \begin{cases} (1 - Z_n)P_n + jl_nP_n, & Z_n < 1, \\ j(1 + l_n - Z_n)P_n, & Z_n \in [1, 1 + l_n), \\ (1 + l_n - Z_n)P_n, & Z_n \geq 1 + l_n, \end{cases}$$

- $j \in [0, 1]$ část ziskové přirážky, které je pojišťovna ochotna se vzdát na krytí budoucích negativních výkyvů ve škodách

Modifikace

- Tvorba/čerpání = část celkových zisků/ztrát, tlumení výkyvů
- $T'_n = j'(1 + l_n - Z_n)P_n$

$\rightarrow$ $j = 1$, zasloužené ryzí pojistné $j'P_n$

- $ET_n, \quad ET_n^2, \quad P(F_n \leq x \mid F_{n-1} = y)$

Stacionární rozdělení RF

- $I_n = I$, $P_n = P$, $C_n = C \to \{F_n\}$ stacionární proces
- Prostředky RF na počátku období n zvýšené o tvorbu/čerpání

$$U_n = F_{n-1} + T_n, \quad U_n = g(U_{n-1}) + T_n, \quad f_U \text{ hustota}$$

- Stacionární stav $\quad U \stackrel{\mathcal{D}}{=} g(U) + T$

$$f_U(x) = f_T(x) \int_{-\infty}^{0} f_U(u)du + \int_0^C f_U(u) f_T(x-u)du + f_T(x-C) \int_C^{\infty} f_U(u)du$$

- Stacionární rozdělení ($F = g(U)$)

$$p_0 = P(F = 0) = \int_{-\infty}^{0} f_U(u)du, \quad p_1 = P(F = C) = \int_C^{\infty} f_U(u)du$$

$$\text{a} \quad f_F(x) = f_U(x), \quad 0 < x < C$$

Aproximace stacionárního rozdělení RF

Aproximace transformací náhodných veličin

- Analytický tvar hustoty f_U veličiny U
- $U_n \doteq h_n(\eta_n), \quad \eta_n \sim N(0,1), \quad h_n$ známá transformační funkce
- $h_n(\eta_n) \doteq g_{n-1}(h_{n-1}(\eta_{n-1})) + T_n$
- Stacionární stav

$$h(\eta) \stackrel{\mathcal{D}}{=} g(h(\eta)) + T, \quad \eta \sim N(0,1)$$

- $F_U(x) = \Phi(h^{-1}(x)), \quad f_U(x) = \phi(h^{-1}(x))[h(x)]', \quad x \in \mathrm{R}$

Aproximace rozdělení RF

- $h_n(x) = C + (1+jl)P - e^{a_1^n x + a_0^n}$
- Stacionární stav

$$U \doteq C + (1+jl)P - Y, \quad Y \sim LN(a_0, {a_1}^2)$$

Aproximace stacionárního rozdělení RF

Aproximace transformací náhodných veličin

- Analytický tvar hustoty f_U veličiny U
- $U_n \doteq h_n(\eta_n), \quad \eta_n \sim N(0,1), \quad h_n$ známá transformační funkce
- $h_n(\eta_n) \doteq g_{n-1}(h_{n-1}(\eta_{n-1})) + T_n$
- Stacionární stav

$$h(\eta) \stackrel{\mathcal{D}}{=} g(h(\eta)) + T, \quad \eta \sim N(0,1)$$

- $F_U(x) = \Phi(h^{-1}(x)), \quad f_U(x) = \phi(h^{-1}(x))[h(x)]', \quad x \in \mathrm{R}$

Aproximace rozdělení RF

- $h_n(x) = C + (1+jl)P - e^{a_1^n x + a_0^n}$
- Stacionární stav

$$U \doteq C + (1+jl)P - Y, \quad Y \sim LN(a_0, {a_1}^2)$$

Aproximace stacionárního rozdělení RF

- $T + g(U) \stackrel{\mathcal{D}}{=} U$
- $$ET + Eg(U) = EU$$
  $$ET^2 + 2ETEg(U) + Eg(U)^2 = EU^2$$

$$Eg(U)^i = \int_0^C u^i f_U(u)du + C^i P(U \geq C), \quad i = 1, 2$$

- $Y \sim$ LN $\rightarrow EU^i$, $Eg(U)^i$ lze vyjádřit pomocí d. f. N(0,1)

$\rightarrow$ a_0, a_1, F_Y, f_Y distribuční funkce, hustota LN(a_0,${a_1}^2$)

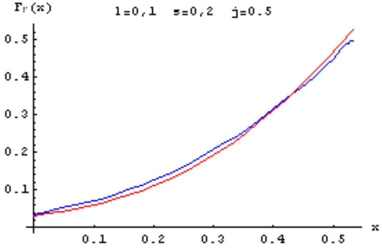
Stacionární rozdělení RF

$$p_0 = 1 - F_Y(C + (1 + jl)P), \quad p_1 = F_Y((1 + jl)P),$$

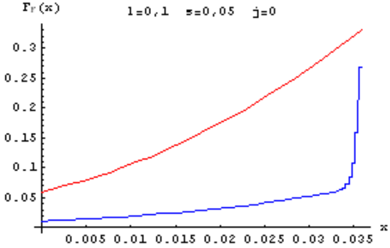
$$f_F(x) = f_Y(C + (1 + jl)P - x), \quad x \in (0, C)$$

Aproximace stacionárního rozdělení RF

- Aproximace Markovskými řetězci s diskrétními stavy
  - Libovolně přesná aproximace limitním rozdělením
- Porovnání obou aproximací
  - Ukazatel E – kvadratická chyba aproximace



- $P(F = 0) = 0{,}036,\ p_0 = 0{,}032$
- $P(F = C) = 0{,}493,\ p_1 = 0{,}474$
- $E = 0{,}00018$



- $P(F = 0) = 0{,}011,\ p_0 = 0{,}060$
- $P(F = C) = 0{,}498,\ p_1 = 0{,}669$
- $E = 0{,}028$

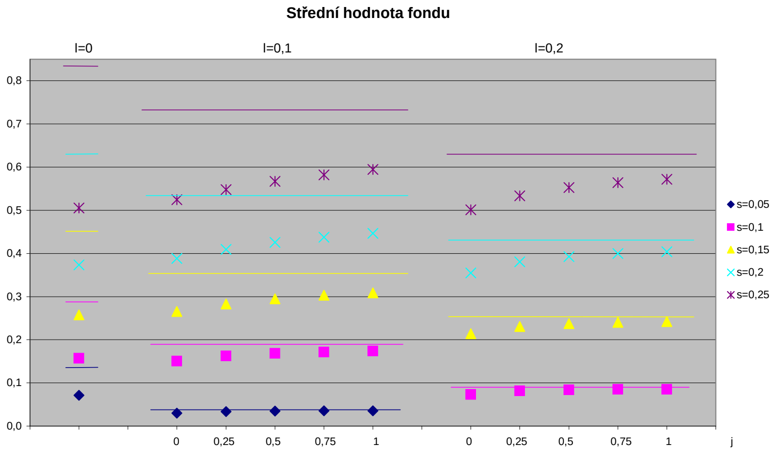
Funkce rezervního fondu

1. Krytí technických ztrát
   $\longrightarrow$ Zvýšení bezpečnosti daného odvětví
2. Vyrovnávání výkyvů ve škodném poměru v čase
   $\longrightarrow$ Snížení rizika daného odvětví
3. Poskytování informace o riziku (zachování informace v účetnictví)
   $\longrightarrow$ Zlepšování řízení rizik

- Cenou za tyto funkce jsou náklady ušlé příležitosti z prostředků rezervního fondu

Střední výše RF

- $EF = Eg(U) = CP(U > C) + \int_0^C u f_U(u) du$
- $C = (z_{0,995}^Z - 1 - l)P, \quad P = 1$



Bezpečnostní funkce

Situace bez rezervního fondu

- Technický výsledek $TZ_n = (1 - Z_n)P + IP$
- Krytí neočekávaných ztrát ziskovou přirážkou v pojistném IP
- Pravděpodobnost technické ztráty $P(TZ_n < 0) = P(Z > 1 + I)$

Používání rezervního fondu

- Skutečný výsledek technického účtu $W_n = (1 + I - Z_n)P - (F_n - F_{n-1})$
- Krytí neočekávaných ztrát ziskovou přirážkou a prostředky F_{n-1}
- Pravděpodobnost nedostatečnosti těchto zdrojů $P(W_n < 0) = P(F = 0) = p_0$

Bezpečnostní funkce

Situace bez rezervního fondu

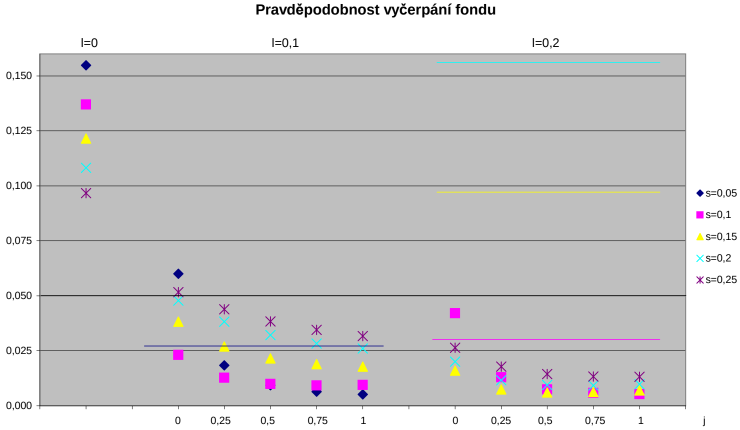
- Technický výsledek $TZ_n = (1 - Z_n)P + IP$
- Krytí neočekávaných ztrát ziskovou přirážkou v pojistném IP
- Pravděpodobnost technické ztráty $P(TZ_n < 0) = P(Z > 1 + I)$

Používání rezervního fondu

- Skutečný výsledek technického účtu
  $W_n = (1 + I - Z_n)P - (F_n - F_{n-1})$
- Krytí neočekávaných ztrát ziskovou přirážkou a prostředky F_{n-1}
- Pravděpodobnost nedostatečnosti těchto zdrojů
  $P(W_n < 0) = P(F = 0) = p_0$

Bezpečnostní funkce

$P(Z > 1 + l)$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25
$l = 0$	0,490	0,480	0,470	0,461	0,451
$l = 0{,}1$	0,027	0,157	0,238	0,281	0,305
$l = 0{,}2$		0,030	0,097	0,154	0,194



Vyrovnávací funkce

- Míra rizika – směrodatná odchylka ročních zisků/ztrát na jednotku zaslouženého ryzího pojistného

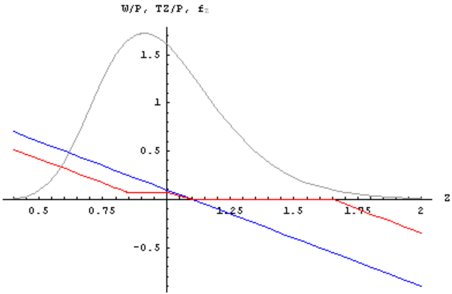
Situace bez rezervního fondu

- $TZ_n = (1 + I - Z_n)P, \quad \sigma_{TZ_n/P} = \sigma_Z$

Používání rezervního fondu

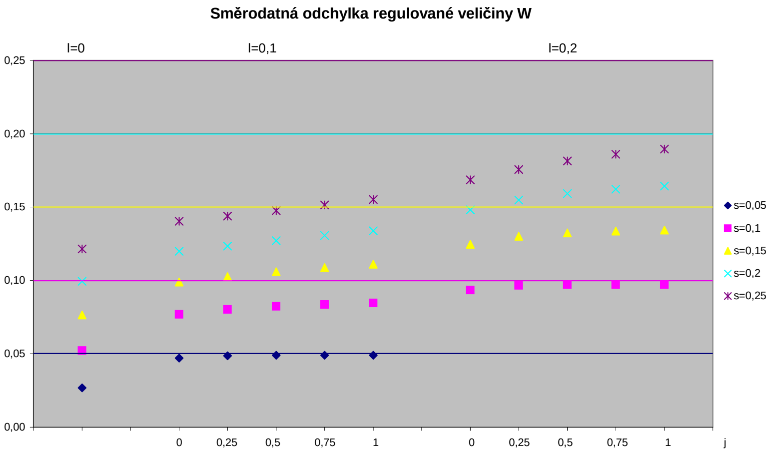
- $W_n = (1 + I - Z_n)P - (F_n - F_{n-1}), \quad \sigma_{W_n/P} = \sqrt{\mathrm{Var}(W_n/P)}$

- $\sigma_Z = 0{,}25$
- $I = 0{,}1$
- $j = 0{,}25$
- $F_{n-1} = EF$
- $P = 1$
- $C = z^Z_{0{,}995} - 1{,}1$



Vyrovnávací funkce

- $E(W_n/P)^i = E_{F_{n-1}}(E\{(W_n/P)^i | F_{n-1}\}), \quad i = 1,2$
- $C = (z^Z_{0,995} - 1 - l)P, \quad P = 1$



Vyrovnávací funkce

Snížení rizika daného odvětví → podíly $\frac{\sigma_{W/P}}{\sigma_Z}$

$l = 0$

σ_Z	
0,05	53%
0,1	52%
0,15	51%
0,2	50%
0,25	49%

$l = 0{,}1$

$\sigma_Z \setminus j$	0	0,25	0,5	0,75	1
0,05	94%	97%	98%	98%	98%
0,1	77%	80%	82%	84%	85%
0,15	66%	68%	71%	72%	74%
0,2	60%	62%	64%	65%	67%
0,25	56%	58%	59%	61%	62%

$l = 0{,}2$

$\sigma_Z \setminus j$	0	0,25	0,5	0,75	1
0,1	93%	97%	97%	97%	97%
0,15	83%	87%	88%	89%	90%
0,2	74%	77%	80%	81%	82%
0,25	67%	70%	73%	74%	76%

Kritéria tvorby RF

Rezervní fond se netvoří, pokud

1. se jedná o odvětví s malou významností
   - Nízké (absolutní/relativní) zasloužené ryzí pojistné P

   $\rightarrow$ Zanedbatelné dopady výkyvů ve škodném poměru
2. pravděpodobnost ztráty $P(Z > 1 + l)$ je malá
   - Zisková přirážka l stačí k absorbování negativních výkyvů

   $\rightarrow$ Bezpečnostní funkce je zanedbatelná
3. výkyvy ve škodném poměru jsou malé
   - Nízká směrodatná odchylka σ_Z

   $\rightarrow$ Další vyrovnávání rizik v čase je zbytečné

Kritéria tvorby RF

Rezervní fond se netvoří, pokud

1. se jedná o odvětví s malou významností
   - Nízké (absolutní/relativní) zasloužené ryzí pojistné P

   $\rightarrow$ Zanedbatelné dopady výkyvů ve škodném poměru
2. pravděpodobnost ztráty $P(Z > 1 + l)$ je malá
   - Zisková přirážka l stačí k absorbování negativních výkyvů

   $\rightarrow$ Bezpečnostní funkce je zanedbatelná
3. výkyvy ve škodném poměru jsou malé
   - Nízká směrodatná odchylka σ_Z

   $\rightarrow$ Další vyrovnávání rizik v čase je zbytečné

Kritéria tvorby RF

Rezervní fond se netvoří, pokud

1. se jedná o odvětví s malou významností
   - Nízké (absolutní/relativní) zasloužené ryzí pojistné P

   $\rightarrow$ Zanedbatelné dopady výkyvů ve škodném poměru
2. pravděpodobnost ztráty $P(Z > 1 + l)$ je malá
   - Zisková přirážka l stačí k absorbování negativních výkyvů

   $\rightarrow$ Bezpečnostní funkce je zanedbatelná
3. výkyvy ve škodném poměru jsou malé
   - Nízká směrodatná odchylka σ_Z

   $\rightarrow$ Další vyrovnávání rizik v čase je zbytečné

Model pro dvě odvětví

Upravené škodné poměry

- $Z^1_{-k_1}, \ldots, Z^1_0, \quad \sigma_{Z^1}, \quad Z^1 \sim LN(\mu^1, (\sigma^1)^2)$
- $Z^2_{-k_2}, \ldots, Z^2_0, \quad \sigma_{Z^2}, \quad Z^2 \sim LN(\mu^2, (\sigma^2)^2), \quad \mathrm{Corr}(Z^1, Z^2)$
- $P^1_n = P^1, \quad I^1_n = I^1, \quad P^2_n = P^2, \quad I^2_n = I^2, \quad n = 1, 2, \ldots$

Obsah

1. Sdružené rozdělení (Z^1, Z^2)
2. Celkové zisky a ztráty
3. Model oddělených fondů
   - Sdružené rozdělení rezervních fondů
   - Regulované zisky/ztráty
4. Model vzájemně propojených fondů
   - Společný rezervní fond
   - Pomoc při nedostatku prostředků

Sdružené rozdělení (Z^1, Z^2)

- Rozdělení vektoru (Z^1, Z^2) je určeno marginálními distribučními funkcemi F_{Z^1}, F_{Z^2} a kopulou C_Z

- $F_{Z^1,Z^2}(z_1, z_2) = C_Z(F_{Z^1}(z_1), F_{Z^2}(z_2))$
- $f_{Z^1,Z^2}(z_1, z_2) = c_Z(F_{Z^1}(z_1), F_{Z^2}(z_2)) f_{Z^1}(z_1) f_{Z^2}(z_2)$
- $c_Z(u, v) = \frac{\partial^2 C_Z(u,v)}{\partial u \partial v}, \quad u, v \in [0, 1]$

- Kopula C_Z charakterizuje závislostní strukturu veličin Z^1, Z^2
- Kopula je invariantní vůči striktně monotónním transformacím
- $Z^i = e^{\vartheta^i}, \quad \vartheta^i \sim N(\mu^i, (\sigma^i)^2), \quad i = 1, 2$
- Předpoklad

$$(\vartheta^1, \vartheta^2) \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 & \rho\sigma^1\sigma^2 \\ \rho\sigma^1\sigma^2 & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix}\right)$$

Sdružené rozdělení (Z^1, Z^2)

- Gaussova (normální) kopula

$$C(u,v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad u, v \in [0,1]$$

- Φ – distr. f. $N(0,1)$, $\quad \Phi_\rho$ – distr. f. $N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$
- $F_{Z^i}(x) = \Phi(\frac{\ln x - \mu^i}{\sigma^i}), \quad i = 1,2$
- $F_{Z^1,Z^2}(z_1,z_2) = \Phi_\rho(\frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2})$
- $f_{Z^1,Z^2}(z_1,z_2) = \phi_\rho(\frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2}) \frac{1}{z_1\sigma^1} \frac{1}{z_2\sigma^2}$

$$(Z^1, Z^2) \sim \Lambda_2\left(\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 & \rho\sigma^1\sigma^2 \\ \rho\sigma^1\sigma^2 & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix}\right)$$

- $\rho = \frac{1}{\sigma^1\sigma^2} \ln(1 + \mathrm{Corr}(Z^1,Z^2)\sqrt{\exp((\sigma^1)^2) - 1}\sqrt{\exp((\sigma^2)^2) - 1})$

Sdružené rozdělení (Z^1, Z^2)

- Gaussova (normální) kopula

$$C(u,v) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad u, v \in [0,1]$$

- Φ – distr. f. $N(0,1)$, $\quad \Phi_\rho$ – distr. f. $N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$
- $F_{Z^i}(x) = \Phi(\frac{\ln x - \mu^i}{\sigma^i}), \quad i = 1,2$
- $F_{Z^1,Z^2}(z_1,z_2) = \Phi_\rho(\frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2})$
- $f_{Z^1,Z^2}(z_1,z_2) = \phi_\rho(\frac{\ln z_1 - \mu^1}{\sigma^1}, \frac{\ln z_2 - \mu^2}{\sigma^2})\frac{1}{z_1\sigma^1}\frac{1}{z_2\sigma^2}$

$$(Z^1, Z^2) \sim \Lambda_2\left(\begin{pmatrix} \mu^1 \\ \mu^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\sigma^1)^2 & \rho\sigma^1\sigma^2 \\ \rho\sigma^1\sigma^2 & (\sigma^2)^2 \end{pmatrix}\right)$$

- $\rho = \frac{1}{\sigma^1\sigma^2}\ln(1 + \mathrm{Corr}(Z^1,Z^2)\sqrt{\exp((\sigma^1)^2) - 1}\sqrt{\exp((\sigma^2)^2) - 1})$

Celkové zisky/ztráty

- $TZ_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad P^c = P^1 + P^2$
- $Z_n^c = w_1 Z_n^1 + w_2 Z_n^2, \quad I^c = w_1 I^1 + w_2 I^2, \quad w_1 = \frac{P^1}{P^c}, \quad w_2 = \frac{P^2}{P^c}$
- Střední hodnota $ETZ^c = I^c P^c$
- Pravděpodobnost technické ztráty

$$P(TZ^c < 0) = 1 - \int_0^{\frac{1+I^c}{w_1}} \int_0^{\frac{1+I^c - z_1 w_1}{w_2}} f_{Z^1,Z^2}(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

- Celkové riziko spojené s obchodem
  - Směrodatná odchylka TZ^c na jednotku P^c, $\quad \sigma_{TZ^c/P^c} = \sqrt{\text{Var}Z^c}$

$$\text{Var}Z^c = (w_1 \sigma_{Z^1})^2 + (w_2 \sigma_{Z^2})^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{Z^1} \sigma_{Z^2} \text{Corr}(Z^1, Z^2)$$

Celkové zisky/ztráty

- $TZ_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad P^c = P^1 + P^2$
- $Z_n^c = w_1 Z_n^1 + w_2 Z_n^2, \quad I^c = w_1 I^1 + w_2 I^2, \quad w_1 = \frac{P^1}{P^c}, \quad w_2 = \frac{P^2}{P^c}$
- Střední hodnota $ETZ^c = I^c P^c$
- Pravděpodobnost technické ztráty

$$P(TZ^c < 0) = 1 - \int_0^{\frac{1+I^C}{w_1}} \int_0^{\frac{1+I^C - z_1 w_1}{w_2}} f_{Z^1, Z^2}(z_1, z_2) dz_1 dz_2$$

- Celkové riziko spojené s obchodem
  - Směrodatná odchylka TZ^c na jednotku P^c, $\quad \sigma_{TZ^c/P^c} = \sqrt{\mathrm{Var} Z^c}$

$$\mathrm{Var} Z^c = (w_1 \sigma_{Z^1})^2 + (w_2 \sigma_{Z^2})^2 + 2 w_1 w_2 \sigma_{Z^1} \sigma_{Z^2} \mathrm{Corr}(Z^1, Z^2)$$

Model oddělených fondů

- Dva samostatné rezervní fondy

$$F_n^i = g^i(F_{n-1}^i + T_n^i), \quad g^i(x) = \max(0, \min(x, C^i)), \quad i = 1, 2$$

- Tvorba/čerpání i-tého fondu T_n^i závisí pouze na škodách příslušného odvětví
- Bezpečnostní funkce
  - Neuhrazené roční ztráty jednoho odvětví ($F_n^i = 0$) jsou kompenzovány zisky druhého odvětví snížené o skutečné navýšení příslušného rezervního fondu
- Vyrovnávací funkce
  - Prostředky každého z rezervních fondů vyrovnávají pouze výkyvy ve škodném poměru svého odvětví

Sdružené rozdělení RF

- $U^i_n = g^i(U^i_{n-1}) + T^i_n, \quad F^i_n = g^i(U^i_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2$

$$\begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \end{pmatrix} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \begin{pmatrix} g^1(U^1) \\ g^2(U^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1 \\ T^2 \end{pmatrix}$$

- $U^i = C^i + (1 + j^i I^i)P^i - Y^i, \quad Y^i \sim LN(a^i_0, (a^i_1)^2), \quad Y^i = e^{\eta^i}$
- Marginální rozdělení U^i je určeno distribuční funkcí F_{Y^i}
- $(Z^1, Z^2) \sim \Lambda_2 \quad \rightarrow \quad (Y^1, Y^2) = (e^{\eta^1}, e^{\eta^2}) \sim \Lambda_2$
- Závislostní struktura dána $p = \mathrm{Corr}(\eta^1, \eta^2)$
- $F_{Y^1,Y^2}(y_1, y_2) = \Phi_p\left(\frac{\ln y_1 - a^1_0}{a^1_1}, \frac{\ln y_2 - a^2_0}{a^2_1}\right)$
- $f_{Y^1,Y^2}(y_1, y_2) = \phi_p\left(\frac{\ln y_1 - a^1_0}{a^1_1}, \frac{\ln y_2 - a^2_0}{a^2_1}\right) \frac{1}{y_1 a^1_1} \frac{1}{y_2 a^2_1}, \quad y_1 > 0, \quad y_2 > 0$

Sdružené rozdělení RF

- $EU^i = E(g^i(U^i) + T^i), \quad E(U^i)^2 = E(g^i(U^i) + T^i)^2 \;\rightarrow\; a_0^i,\, a_1^i$
- $EU^1U^2 = E(g^1(U^1) + T^1)(g^2(U^2) + T^2) \;\rightarrow\; p$
- $EU^1U^2,\; Eg^1(U^1)g^2(U^2)$ lze vyjádřit pomocí ϕ_p
- Parametry a_0^1, a_1^1, a_0^2, a_1^2, p určují aproximovanou d. f. F_{F^1,F^2}

Korelace rezervních fondů

$$\mathrm{Corr}(F^1, F^2) = \frac{Eg^1(U^1)g^2(U^2) - EF^1EF^2}{\sqrt{Eg^1(U^1)^2 - EF^1}\sqrt{Eg^2(U^2)^2 - EF^2}}$$

- $\sigma_{Z^1} = 0{,}1, \quad \sigma_{Z^2} = 0{,}2, \quad P^i = 1, \quad I^i = 0{,}1, \quad j^i = 0{,}5, \quad i = 1,2$

$\mathrm{Corr}(Z^1, Z^2)$	-0,75	-0,50	-0,25	-0,10	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75
$\mathrm{Corr}(F^1, F^2)$	-0,31	-0,26	-0,17	-0,06	0,01	0,01	0,16	0,34	0,55

Sdružené rozdělení RF

- $EU^i = E(g^i(U^i) + T^i), \quad E(U^i)^2 = E(g^i(U^i) + T^i)^2 \ \rightarrow \ a_0^i, a_1^i$
- $EU^1U^2 = E(g^1(U^1) + T^1)(g^2(U^2) + T^2) \ \rightarrow \ p$
- $EU^1U^2, \ Eg^1(U^1)g^2(U^2)$ lze vyjádřit pomocí ϕ_p
- Parametry a_0^1, a_1^1, a_0^2, a_1^2, p určují aproximovanou d. f. F_{F^1,F^2}

Korelace rezervních fondů

$$\mathrm{Corr}(F^1, F^2) = \frac{Eg^1(U^1)g^2(U^2) - EF^1EF^2}{\sqrt{Eg^1(U^1)^2 - EF^1}\sqrt{Eg^2(U^2)^2 - EF^2}}$$

- $\sigma_{Z^1} = 0{,}1, \quad \sigma_{Z^2} = 0{,}2, \quad P^i = 1, \quad I^i = 0{,}1, \quad j^i = 0{,}5, \quad i = 1,2$

$\mathrm{Corr}(Z^1, Z^2)$	-0,75	-0,50	-0,25	-0,10	0,00	0,10	0,25	0,50	0,75
$\mathrm{Corr}(F^1, F^2)$	-0,31	-0,26	-0,17	-0,06	0,01	0,01	0,16	0,34	0,55

Regulované zisky/ztráty

Situace bez rezervních fondů

- $TZ_n^c = (1 - Z_n^c)P^c + I^c P^c, \quad P(TZ^c < 0), \quad \sigma_{TZ^c/P^c} = \sigma_{Z^c}$

Model dvou oddělených fondů

- Jednotlivé zisky/ztráty nejprve upraveny o změnu příslušného RF
- Skutečný roční výsledek technického účtu $W_n^c = W_n^1 + W_n^2$
- $W_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c - (F_n^1 - F_{n-1}^1) - (F_n^2 - F_{n-1}^2)$

Funkce

- Snížení pravděpodobnosti celkové ztráty na $P(W^c < 0)$
- Snížení celkového rizika na úroveň σ_{W^c/P^c}

Cena

- Alternativní výnosy z investování prostředků $EF^1 + EF^2$

Regulované zisky/ztráty

Situace bez rezervních fondů

- $TZ_n^c = (1 - Z_n^c)P^c + I^c P^c, \quad P(TZ^c < 0), \quad \sigma_{TZ^c/P^c} = \sigma_{Z^c}$

Model dvou oddělených fondů

- Jednotlivé zisky/ztráty nejprve upraveny o změnu příslušného RF
- Skutečný roční výsledek technického účtu $W_n^c = W_n^1 + W_n^2$
- $W_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c - (F_n^1 - F_{n-1}^1) - (F_n^2 - F_{n-1}^2)$

Funkce

- Snížení pravděpodobnosti celkové ztráty na $P(W^c < 0)$
- Snížení celkového rizika na úroveň σ_{W^c/P^c}

Cena

- Alternativní výnosy z investování prostředků $EF^1 + EF^2$

Regulované zisky/ztráty

Situace bez rezervních fondů

- $TZ_n^c = (1 - Z_n^c)P^c + I^c P^c, \quad P(TZ^c < 0), \quad \sigma_{TZ^c/P^c} = \sigma_{Z^c}$

Model dvou oddělených fondů

- Jednotlivé zisky/ztráty nejprve upraveny o změnu příslušného RF
- Skutečný roční výsledek technického účtu $W_n^c = W_n^1 + W_n^2$
- $W_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c - (F_n^1 - F_{n-1}^1) - (F_n^2 - F_{n-1}^2)$

Funkce

- Snížení pravděpodobnosti celkové ztráty na $P(W^c < 0)$
- Snížení celkového rizika na úroveň σ_{W^c/P^c}

Cena

- Alternativní výnosy z investování prostředků $EF^1 + EF^2$

Bezpečnostní funkce

$$P(W_n^c < 0) = p_A + p_B + p_C = P(W_n^C < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 \geq 0) +$$

$$+ P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 \geq 0 \,\&\, W_n^2 < 0) + P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 < 0)$$

- $p_C = P(W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 < 0) = P(F_n^1 = 0, F_n^2 = 0)$
- $p_A = E_{F_{n-1}^1, F_{n-1}^2}\{P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 \geq 0 \mid F_{n-1}^1, F_{n-1}^2)\}$

  $\rightarrow$ určení kombinací Z_n^1, Z_n^2 vedoucích k dané situaci
  - $W_n^1 < 0$, je-li $Z_n^1 > 1 + I^1 + F_{n-1}^1 / P^1$
  - Je-li $F_n^2 = C^2$, pak $W_n^c < 0$, pokud

    $(1 + I^1 - Z_n^1)P^1 + (1 + I^2 - Z_n^2)P^2 + F_{n-1}^1 - (C^2 - F_{n-1}^2) < 0$
  - Je-li $F_n^2 < C^2$, pak $W_n^c < 0$, pokud
    a) druhé odvětví je ziskové ($Z_n^2 < 1 + I^2$), ale $W_n^2 < -W_n^1$
    b) celkové ztráty druhého odvětví jsou plně pokryty prostředky příslušného rezervního fondu, tj. $W_n^2 = 0$

Bezpečnostní funkce

$$P(W_n^c < 0) = p_A + p_B + p_C = P(W_n^C < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 \geq 0) +$$

$$+ P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 \geq 0 \,\&\, W_n^2 < 0) + P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 < 0)$$

- $p_C = P(W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 < 0) = P(F_n^1 = 0, F_n^2 = 0)$
- $p_A = E_{F_{n-1}^1, F_{n-1}^2} \{ P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 \geq 0 \mid F_{n-1}^1, F_{n-1}^2) \}$

$\rightarrow$ určení kombinací Z_n^1, Z_n^2 vedoucích k dané situaci

- $W_n^1 < 0$, je-li $Z_n^1 > 1 + I^1 + F_{n-1}^1 / P^1$
- Je-li $F_n^2 = C^2$, pak $W_n^c < 0$, pokud

  $(1 + I^1 - Z_n^1)P^1 + (1 + I^2 - Z_n^2)P^2 + F_{n-1}^1 - (C^2 - F_{n-1}^2) < 0$
- Je-li $F_n^2 < C^2$, pak $W_n^c < 0$, pokud
  a) druhé odvětví je ziskové ($Z_n^2 < 1 + I^2$), ale $W_n^2 < -W_n^1$
  b) celkové ztráty druhého odvětví jsou plně pokryty prostředky příslušného rezervního fondu, tj. $W_n^2 = 0$

Bezpečnostní funkce

$$P(W_n^c < 0) = p_A + p_B + p_C = P(W_n^C < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 \geq 0)+$$

$$+P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 \geq 0 \,\&\, W_n^2 < 0) + P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 < 0)$$

- $p_C = P(W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 < 0) = P(F_n^1 = 0, F_n^2 = 0)$
- $p_A = E_{F_{n-1}^1, F_{n-1}^2}\{P(W_n^c < 0 \,\&\, W_n^1 < 0 \,\&\, W_n^2 \geq 0 \mid F_{n-1}^1, F_{n-1}^2)\}$

$\rightarrow$ určení kombinací Z_n^1, Z_n^2 vedoucích k dané situaci

- $W_n^1 < 0$, je-li $Z_n^1 > 1 + I^1 + F_{n-1}^1/P^1$
- Je-li $F_n^2 = C^2$, pak $W_n^c < 0$, pokud
  $(1 + I^1 - Z_n^1)P^1 + (1 + I^2 - Z_n^2)P^2 + F_{n-1}^1 - (C^2 - F_{n-1}^2) < 0$
- Je-li $F_n^2 < C^2$, pak $W_n^c < 0$, pokud
  a) druhé odvětví je ziskové ($Z_n^2 < 1 + I^2$), ale $W_n^2 < -W_n^1$
  b) celkové ztráty druhého odvětví jsou plně pokryty prostředky příslušného rezervního fondu, tj. $W_n^2 = 0$

Vyrovnávací funkce

- $\sigma_{W_n^c/P^c} = \sqrt{\mathrm{Var}(W_n^c/P^c)}, \quad W_n^c/P^c = w_1 W_n^1/P^1 + w_2 W_n^2/P^2$

$$\mathrm{Var}(\frac{W_n^c}{P^c}) = (w_1)^2(\sigma_{W_n^1/P^1})^2 + (w_2)^2(\sigma_{W_n^2/P^2})^2 + 2w_1 w_2 \mathrm{Cov}(\frac{W_n^1}{P^1}, \frac{W_n^2}{P^2})$$

- $\sigma_{W_n^i/P^i}$ známé

$$\mathrm{Cov}(\frac{W_n^1}{P^1}, \frac{W_n^2}{P^2}) = \mathrm{Cov}(\frac{F_n^1 - F_{n-1}^1}{P^1}, \frac{F_n^2 - F_{n-1}^2}{P^2}) +$$
$$+ \mathrm{Cov}(Z_n^1, Z_n^2) + \mathrm{Cov}(Z_n^1, \frac{F_n^2}{P^2}) + \mathrm{Cov}(\frac{F_n^1}{P^1}, Z_n^2)$$

- $\mathrm{Cov}(F_n^1 - F_{n-1}^1, F_n^2 - F_{n-1}^2) = \mathrm{Cov}(F_n^1, F_n^2)$

$$EZ_n^1 \frac{F_n^2}{P^2} = E_{F_{n-1}^2}\{\int\int z_1 \frac{F_n^2}{P^2}(z_2, F_{n-1}^2) dF_{Z^1,Z^2}(z_1, z_2)\}$$

Vyrovnávací funkce

- $\sigma_{W_n^c/P^c} = \sqrt{\mathrm{Var}(W_n^c/P^c)}, \quad W_n^c/P^c = w_1 W_n^1/P^1 + w_2 W_n^2/P^2$

$$\mathrm{Var}(\frac{W_n^c}{P^c}) = (w_1)^2(\sigma_{W_n^1/P^1})^2 + (w_2)^2(\sigma_{W_n^2/P^2})^2 + 2w_1 w_2 \mathrm{Cov}(\frac{W_n^1}{P^1}, \frac{W_n^2}{P^2})$$

- $\sigma_{W_n^i/P^i}$ známé

$$\mathrm{Cov}(\frac{W_n^1}{P^1}, \frac{W_n^2}{P^2}) = \mathrm{Cov}(\frac{F_n^1 - F_{n-1}^1}{P^1}, \frac{F_n^2 - F_{n-1}^2}{P^2}) +$$
$$+ \mathrm{Cov}(Z_n^1, Z_n^2) + \mathrm{Cov}(Z_n^1, \frac{F_n^2}{P^2}) + \mathrm{Cov}(\frac{F_n^1}{P^1}, Z_n^2)$$

- $\mathrm{Cov}(F_n^1 - F_{n-1}^1, F_n^2 - F_{n-1}^2) = \mathrm{Cov}(F_n^1, F_n^2)$

$$EZ_n^1 \frac{F_n^2}{P^2} = E_{F_{n-1}^2}\{\int\int z_1 \frac{F_n^2}{P^2}(z_2, F_{n-1}^2) dF_{Z^1,Z^2}(z_1, z_2)\}$$

Vyrovnávací funkce

- $\sigma_{W_n^c/P^c} = \sqrt{\mathrm{Var}(W_n^c/P^c)}, \quad W_n^c/P^c = w_1 W_n^1/P^1 + w_2 W_n^2/P^2$

$$\mathrm{Var}(\frac{W_n^c}{P^c}) = (w_1)^2(\sigma_{W_n^1/P^1})^2 + (w_2)^2(\sigma_{W_n^2/P^2})^2 + 2w_1 w_2 \mathrm{Cov}(\frac{W_n^1}{P^1}, \frac{W_n^2}{P^2})$$

- $\sigma_{W_n^i/P^i}$ známé

$$\mathrm{Cov}(\frac{W_n^1}{P^1}, \frac{W_n^2}{P^2}) = \mathrm{Cov}(\frac{F_n^1 - F_{n-1}^1}{P^1}, \frac{F_n^2 - F_{n-1}^2}{P^2}) + \\ + \mathrm{Cov}(Z_n^1, Z_n^2) + \mathrm{Cov}(Z_n^1, \frac{F_n^2}{P^2}) + \mathrm{Cov}(\frac{F_n^1}{P^1}, Z_n^2)$$

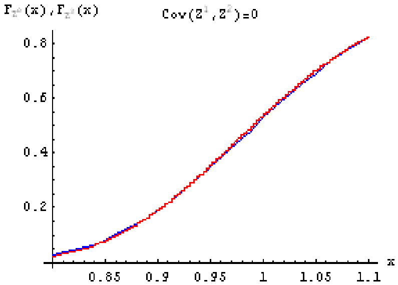
- $\mathrm{Cov}(F_n^1 - F_{n-1}^1, F_n^2 - F_{n-1}^2) = \mathrm{Cov}(F_n^1, F_n^2)$

$$EZ_n^1 \frac{F_n^2}{P^2} = E_{F_{n-1}^2}\{\int\int z_1 \frac{F_n^2}{P^2}(z_2, F_{n-1}^2) dF_{Z^1,Z^2}(z_1, z_2)\}$$

Příklad

- Nezávislá odvětví
  - $\sigma_{Z^1} = 0{,}1, \quad j^1 = 0{,}5, \quad I^1 = 0{,}1, \quad P^1 = 1, \quad C^1 = 0{,}1866$
  - $\sigma_{Z^2} = 0{,}2, \quad j^2 = 0{,}5, \quad I^2 = 0{,}1, \quad P^2 = 1, \quad C^2 = 0{,}5332$
- Bezpečnost
  - $P(W^c < 0) = 0{,}0284$
  - $P(TZ^c < 0) = 0{,}1782$
- Vyrovnání
  - $\sigma_{W^c/P^c} = 0{,}0828$
  - $\sigma_{TZ^c/P^c} = 0{,}1118$
- Střední výše fondů
  - $EF^1 + EF^2 = 0{,}594$

- $TZ_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c$
- $Z^c = w_1 Z^1 + w_2 Z^2$
- $Z^c \doteq Z^3 \sim LN(\mu^3, (\sigma^3)^2)$
- $EZ^3 = EZ^c = 1, \; E(Z^3)^2 = E(Z^c)^2$
- $W_n^3 = (1 + I^c - Z_n^3)P^c - (F_n^3 - F_{n-1}^3)$
- $C^3 = (z_{0,995}^{Z^3} - 1 - I^c)P^c$

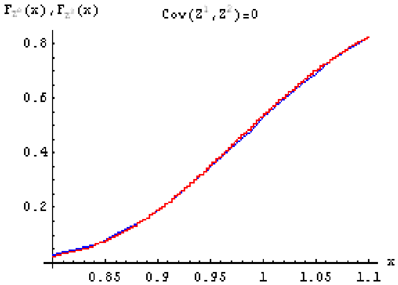


Porovnání se dvěma oddělenými fondy

- Podobné vyrovnání rizik v čase (σ_{W^3/P^c})
- Méně zadržených prostředků (EF^3)
- Větší bezpečnost (nižší $P(W^3 < 0)$)
- Ztráta informace o rizicích v jednotlivých odvětvích

Společný fond

- $TZ_n^c = (1 + I^c - Z_n^c)P^c$
- $Z^c = w_1 Z^1 + w_2 Z^2$
- $Z^c \doteq Z^3 \sim LN(\mu^3, (\sigma^3)^2)$
- $EZ^3 = EZ^c = 1, \; E(Z^3)^2 = E(Z^c)^2$
- $W_n^3 = (1 + I^c - Z_n^3)P^c - (F_n^3 - F_{n-1}^3)$
- $C^3 = (z_{0{,}995}^{Z^3} - 1 - I^c)P^c$



Porovnání se dvěma oddělenými fondy

- Podobné vyrovnání rizik v čase (σ_{W^3/P^c})
- Méně zadržených prostředků (EF^3)
- Větší bezpečnost (nižší $P(W^3 < 0)$)
- Ztráta informace o rizicích v jednotlivých odvětvích

Vzájemná pomoc

- Tvorba rezervních fondů oddělena
- Ztráty jednotlivých odvětví absorbovány
  1. Vlastním rezervním fondem
  2. Regulovanými zisky druhého odvětví
  3. Prostředky druhého RF, je-li nad stanovenou hranicí M
- M^1, M^2 určeny absolutně, relativně ke stavu RF, relativně k horní mezi, nižší kvantil, ...
- Pomoc, pokud $F_n^1 = 0,\ W_n^1 < -W_n^2,\ F_n^2 > M^2$ nebo naopak
- Posílení bezpečnostní funkce – snížení $P(W^c < 0)$ na $P(W_M^c < 0)$ o

$$P(-W_n^2 - (F_n^2 - M^2)^+ < W^1 < -W^2) + \\ + P(-W_n^1 - (F_n^1 - M^1)^+ < W^2 < -W^1)$$

Příklad

- Nezávislá odvětví
  - $\sigma_{Z^1} = 0{,}1, \quad j^1 = 0{,}5, \quad l^1 = 0{,}1, \quad P^1 = 1$
  - $\sigma_{Z^2} = 0{,}2, \quad j^2 = 0{,}5, \quad l^2 = 0{,}1, \quad P^2 = 1$
  - $\sigma_{Z^c} = 0{,}112, \quad C^i = (z_{0{,}995}^{Z^i} - 1 - l^i)P^i$
- Dva oddělené fondy
  - $P(W^c < 0) = 2{,}84\%, \quad EF^1 + EF^2 = 0{,}594, \quad \sigma_{W^c/P^c} = 0{,}0828$
- Jeden společný fond
  - $C^3 = (z_{0{,}995}^{Z^3} - 1 - l^c)P^c$
  - $P(W^3 < 0) = 1{,}22\%, \quad EF^3 = 0{,}3971, \quad \sigma_{W^3/P^c} = 0{,}0883$
- Vzájemná pomoc (minimální hranice pomoci)
  - M^1, M^2 – 95% kvantil $\rightarrow P(W_M^c < 0) \doteq 1{,}62\%$
  - M^1, M^2 – 90% kvantil $\rightarrow P(W_M^c < 0) \doteq 1{,}32\%$

Shrnutí

- Splnění kritérií tvorby jednotlivých RF
- Sledování rizika odděleně $\rightarrow$ Corr(Z^1, Z^2)

- Výrazná záporná korelace mezi Z^1, Z^2
    - Efekt pomoci nejvýraznější
    - $\rightarrow$ Spojení fondů
    - Nízké riziko σ_{Z^c}
- Výrazná kladná korelace mezi Z^1, Z^2
    - Efekt pomoci zanedbatelný (nízká pravděp. nastání)
    - $\rightarrow$ Oddělené fondy
    - Zachování informace o rizicích odděleně
- Slabá korelace mezi Z^1, Z^2
    - $\rightarrow$ Oddělené fondy s případnou vzájemnou pomocí

Děkuji za pozornost.

Literatura

- Mandl, P.: Water Storage Models Based on Transformed Normal Distribution. *Ekonomicko–matematický obzor*, č. 4, 1979, 455–467.
- Mandl, P.: On the Adaptive Control of Countable Markov Chains. *Probability Theory*, Vol. 5, 1979, 159–173.
- Mandl, P.: Estimation and Control in Markov Chains. *Advances in Applied Probability*, Vol. 6, 1974, 40–60.
- Moran, P. A. P.: The Theory of Storage. Wiley & Sons Inc., New York, 1959.
- Teugels, J. L., Sundt. B.: Encyklopedia of Actuarial Science. Wiley, 2004.
- Wang, S. S.: Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms. *Proc. Casualty Actuarial Soc.*, LXXXV, 1998, 848–939.