Mgr. Jan Šváb

Zobecněný lineární model a jeho použití v povinném ručení

31.3.2006

Seminář z aktuárských věd

Slides by LaTeX

Kooperativa
POJIŠŤOVNA A. S.

Obsah

① Zobecněné lineární modely (GLZ[1])

- Obecný lineární model (GLM)
- Rozdělení exponenciálního typu
- MLE
- Testování hypotéz
- Příklady

② Použití v povinném ručení

- BMS
- Sazby
- Komplexní model

③ Poznámky k software

[1] Zkratka používaná SW StatSoft Statistica

Model

Vysvětlovaná proměnná = systematická složka + stochastická složka

- $y_1, \ldots, y_n$ pozorování vysvětlované proměnné
- y_i je realizací náhodné veličiny Y_i

Obecný lineární model

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

$$\mu_i = \boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta}$$

- p vysvětlujích proměnných $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)'$
- i té pozorování $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ip})'$

Zobecněný lineární model

Obecný model zobecníme ve dvou krocích:

(μ_i je nadále střední hodnotou n. v. Y_i a $\boldsymbol{\beta}$ jsou vysvětlující parametry)

❶ Stochastickou složku: Y_i má rozdělení exponenciálního typu

❷ Systematickou složku:

- lineární vztah mezi vysvětlujícími proměnnými a vysvětlujícími parametry

$$\eta_i = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$$

- spojovací funkce (link)
  mezi střední hodnotou μ_i a lineární složkou η_i

$$g(\mu_i) = \eta_i$$

(ryze monotónní, se spoj. druhou derivací)

Model může obsahovat jak spojité tak kategoriální vysvětlující proměnné

Zpět
Zavřít

Rozdělení exponenciálního typu

Obecná forma

$$f(y,\theta) = \exp\left(d(\theta)e(y) + g(\theta) + h(y)\right)$$

Přirozená forma

$$f(y,\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{y\theta - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(y,\varphi)\right)$$

$d(\theta) = \theta$ a $e(y) = y$, navíc parametr φ

- θ je přirozený (kanonický) parametr
- φ je rozptylový (disperzní) parametr

Zpět
Zavřít

Disperzní funkce $a(\varphi)$: Používá se konstantní rovna φ nebo ve tvaru

$$a_i(\varphi) = \varphi / w_i$$

Kumulantová funkce $b(\theta)$: se spojitou druhou derivaci

$$\kappa_r = b^{(r)}(\theta) a(\varphi)^{r-1}$$

$$\mathrm{E}[Y] = b'(\theta) = \mu \qquad \mathrm{Var}[Y] = b''(\theta)a(\varphi) = V(\mu)a(\varphi)$$

$\kappa(1)$ je střední hodnota a $\kappa(2), \kappa(3)$ další dva centrální momenty

Rozdělení je plně určeno vztahem mezi $\mathrm{E}[Y]$ a $\mathrm{Var}\, Y$.

$V(\mu) = 1$	Normální	$V(\mu) = \mu^2$	Gamma
$V(\mu) = \mu$	Poissonovo	$V(\mu) = \mu^3$	Inverzní Gaussovo

Doplňková funkce $c(y, \varphi)$ normuje hustotu

Měření tailu Míra rizika (hazard rate) na intervalu pevné šířky w

$$h_w(y) = \frac{F(y+w)-F(y)}{1-F(y)} \qquad h_w(y) = \frac{\mathrm{P}(y<Y\leq y+w)}{\mathrm{P}(Y>y))}$$

Interpretace: Uvažujme vrstvu w xs y.

- h_w je prst., že škoda nepřesáhne $y+w$, pokud už přesáhla y.
- Vysoká hodnota h_w znamená, že škoda nad y vyčerpá tuto vrstvu jen s malou prstí. = lehký tail.
- Pro většinu aplikací v pojišťovnictví uvažujeme klesající míru rizika. $h_w(y) \to 0$ pro $y \to \infty$.
  - Normální a Poissonovo mají limitu 1
  - Negativně binomické, Gamma a Inverzní Gaussovo jdou ke konstantě mezi 0 a 1
  - Logaritmicko normální jde k nule, ale není z exp. rodiny s hustotou v přirozeném tvaru

Exp. rodina rozdělení je méně vhodná pro odvětví s těžším tailem.

- ❄ transformace logaritmem a pak GLM není totéž jako GLZ s logaritmickou linkovací funkcí
- ❄ je rozdíl mezi transformací y_i a transformací střední hodnoty

Odhad β metodou maximální věrohodnosti

Logaritmická věrohodnostní funkce

$$l(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i \theta_i - b(\theta)}{a(\varphi)} + c(Y_i, \varphi) \right)$$

Derivace

$$\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial l}{\partial \theta_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i} \frac{\partial \eta_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(\varphi)} (Y_i - \mu_i) \frac{1}{V(\mu_i) g'(\mu_i)} \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$$

Kanonický link: spojovací funkce je inverzní funkcí k b', potom můžeme zjednodušit na soustavu nelineárních rovnic

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \mu_i) \boldsymbol{x}_i = \mathbf{0}$$

Řeší se různými iteračními metodami

Iteračně vážená metoda nejmenších čtverců (IWLS, IRLS)

- $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ je předchozí odhad $\boldsymbol{\beta}$, dopočteme $\hat{\eta}_i = \boldsymbol{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}$ a $\hat{\mu}_i = g_{-1}(\hat{\eta}_i)$
- spočteme pracovní závislou proměnnou

$$z_i = \hat{\eta}_i + (y_i - \hat{\mu}_i)\frac{d\eta_i}{d\mu_i}$$

- vypočteme iteraci vah (začínáme s w_i ze vztahu $a_i(\varphi) = \varphi / w_i$)

$$w_i^{\text{new}} = w_i / [b''(\theta_i)(\frac{d\eta_i}{d\mu_i})^2]$$

- nakonec dostaneme nový odhad $\boldsymbol{\beta}$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{W}\boldsymbol{z}$$

Jako výchozí aproximace se volí $\hat{\mu}_i = y_i$

Míry dobré shody

Plný (saturovaný) model maximalizuje věrhodnostní funkci (l^*)
V saturovaném modelu máme $\hat{\mu}_i^* = y_i$ a $\hat{\theta}_i^* = (b')_{-1}(y_i)$

škálovatelná deviance (log věr. fce modelu vs. její max hodnota)

$$D^*(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = 2\left(l^* - l(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(\varphi)}\left(y_i\left(\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}\right) - \left(b(\hat{\theta}_i^*) - b(\hat{\theta})\right)\right)$$

deviance (při $a_i(\varphi) = \varphi / w_i$)

$$D(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = D^*(\hat{\boldsymbol{\beta}})\varphi = 2\sum_{i=1}^{n} w_i\left(y_i\left(\hat{\theta}_i^* - \hat{\theta}\right) - \left(b(\hat{\theta}_i^*) - b(\hat{\theta})\right)\right)$$

Pearsonovo χ^2 (pozorování vs. odhadem jejich střední hod. v modelu)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \hat{\mu}_i)^2}{V(\hat{\mu}_i)}$$

Testování podmodelu

- Označme $\bar{\boldsymbol{\beta}}$ odhad $\boldsymbol{\beta}$ v podmodelu s $p' < p$ parametry

$$l(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - l(\bar{\boldsymbol{\beta}}) = D^*(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - D^*(\bar{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{D^(\hat{\boldsymbol{\beta}}) - D^*(\bar{\boldsymbol{\beta}})}{\varphi} \stackrel{as}{\sim} \chi^2_q,$$

  kde $q = p - p'$ je rozdíl v počtu parametrů, při známém φ

- Waldův test

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X}/\varphi$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \stackrel{as}{\sim} N_p(\boldsymbol{\beta}, (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{-1}\varphi)$$

  Testy podmnožin $\boldsymbol{\beta}$ jsou založeny na příslušných marginálních rozděleních

- konzistentní statistika pro odhad parametru φ

$$\hat{\varphi} = \frac{D(\hat{\boldsymbol{\beta}})}{n - p}$$

Příklady GLZ

- Obecný lineární model, Normální rozdělení, identita
- Log lineární model, Poissonovo rozdělení, logaritmus
- Gamma regrese, Gamma rozdělení, reciprocita
- Logistický model, Binomické rozdělení, logitová funkce

Další rozdělení:

- Inverzní Gaussovo
- Negativně binomické
- „overdispersed“ Poissonovo rozdělení
- Logaritmicko normální **NE**, jen v obecné formě

Další modely:

- probitový model, log log model

Obecný lineární model

Normální rozdělení $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$: $f(y_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(y_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right)$

- Přirozený parametr $\theta_i = \mu_i$ a rozptylová funkce $V(\mu_i) = 1$
- $a(\varphi) = \varphi = \sigma^2 \qquad b(\theta_i) = \mu^2/2 \qquad c(y_i, \varphi) = -\frac{y^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2)$
- kanonický link: $\mu_i = \eta_i$
- IWLS: $z_i = \eta_i + (y_i - \mu_i) = y_i \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$
  výsledek v prvním kroku
- deviance je reziduální součet čtverců

$$D = \varphi D^* = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\mu}_i)^2$$

Zpět
Zavřít

Log lineární model

Poissonovo rozdělení $Y_i \sim Po(\mu_i)$: $f(y_i) = \frac{e^{-\mu_i}\mu_i^{y_i}}{y_i!}$

- Přirozený parametr $\theta_i = \log \mu_i$ a rozptylová funkce $V(\mu_i) = \mu_i$
- $a(\varphi) = \varphi = 1 \qquad b(\theta_i) = e^{\theta_i} \qquad c(y_i, \varphi) = -\log(y_i!)$
- kanonický link: $\eta_i = \log(\mu_i)$
- IWLS: $z_i = \eta_i + (y_i - \mu_i)/\mu_i$ a iterované váhy $w_i = \mu_i$
- deviance

$$D = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i \log \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} - (y_i - \hat{\mu}_i)\right)$$

- $\sum Y_i \sim Po(\sum \mu_i)$

$$D = 2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i \log \frac{y_i}{\hat{\mu}_i}\right)$$

Zpět Zavřít

Použití GLZ v povinném ručení

- BMS
- Sazby
- Komplexní model

Model v povinném ručení

Y je modelovaná kvantita (výše škody, agregace, počet), závisí na

- $X = \{X_1, X_2, \ldots\}$, apriorní tarifní proměnné - grupování rizik
- $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots\}$, neznámé proměnné

Rizikové faktory pojistníka jsou $\Omega = X \cup Z$.
Pojistné $\mathrm{E}[Y|\Omega]$

	Nese pojistník	Nese pojistitel
Riziko	$\mathrm{E}[Y\|\Omega]$	$Y - \mathrm{E}[Y\|\Omega]$
Střední hodnota	$\mathrm{E}Y$	0
Rozptyl	$\mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y\|\Omega]]$	$\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y\|\Omega]]$

Předchozí situace je čistě teoretická, neboť neznáme Z.

Riziko	$\mathrm{E}[Y\|X]$	$Y - \mathrm{E}[Y\|X]$
Střední hodnota	$\mathrm{E}[Y]$	0
Rozptyl	$\mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y\|X]]$	$\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y\|X]]$

Aposteriorní sazbování

- Minulá škodní zkušenosti o riziku Y, označme $Y^{\leftarrow}$
- Ω a $(X, Y^{\leftarrow})$ s stávají porovnatelné, jak čas běží
- Potom máme pojistné

$$E\left[Y|X, Y^{\leftarrow}\right]$$

Možnosti konstrukce modelu:

① Uvažujeme klasifikaci rizika a BMS odděleně

② Uvažujeme komplexní model klasifikující riziko a zahrnující BMS

Příklad: Španělská pojišťovna 4 x 3 tříd

Zpět
Zavřít

Systém bonus-malus (BMS)

- Riziko i je reprezentováno $(\Theta_i, K_{i1}, K_{i2}, \dots)$
- Počty škod v čase $K_{ij}|\Theta_i = \theta \sim Po(\theta)$ a podmíněně nezávislé
- $\Theta_i \sim \Gamma(a, \tau)$ (K_{ij} má nepodmíněné rozdělení negativně binomické)
- Označme $K_{i\bullet}(t) = \sum_{j=1}^{t} K_{ij}$
- Uvažujme jednotkovou očekávanou výši škody
- Apriori bez historie je požadováno pojistné $\mathrm{E}\left[\Theta_i\right]$
- Pojistné určíme minimalizací $\mathrm{E}\left[L(\theta_i - \Psi(k_{i1}, \dots, k_{it}))\right]$

$$
\begin{array}{llll}
L(x) = x^2 & \Rightarrow \; W^{\mathrm{q}}_{t+1} & = \frac{a}{\tau}(1-\rho_{\mathrm{q}}) & + \; \frac{k_{i\bullet}(t)}{t}\rho_{\mathrm{q}} \\
L(x) = \exp(-cx) & \Rightarrow \; W^{\mathrm{e}}_{t+1} & = \frac{a}{\tau}(1-\rho_{\mathrm{e}}(c)) & + \; \frac{k_{i\bullet}(t)}{t}\rho_{\mathrm{e}}(c)
\end{array}
$$

kde $\rho_{\mathrm{q}} = \frac{t}{\tau+t}$ a $\rho_{\mathrm{e}}(c) = \frac{t}{c}\log\left(1 + \frac{c}{\tau+t}\right)$

$$
\begin{array}{lclcll}
L(x) = x^2 & \Rightarrow & W^{\mathrm{q}}_{t+1} & = & \frac{a}{\tau}(1-\rho_{\mathrm{q}}) & + \frac{k_{i\bullet}(t)}{t}\rho_{\mathrm{q}} \\
L(x) = \exp(-cx) & \Rightarrow & W^{\mathrm{e}}_{t+1} & = & \frac{a}{\tau}(1-\rho_{\mathrm{e}}(c)) & + \frac{k_{i\bullet}(t)}{t}\rho_{\mathrm{e}}(c)
\end{array}
$$

$$
\rho_{\mathrm{q}} = \frac{t}{\tau+t} \qquad \rho_{\mathrm{e}}(c) = \frac{t}{c}\log\left(1+\frac{c}{\tau+t}\right)
$$

- $\rho_{\mathrm{e}}(c) \leq \rho_{\mathrm{q}}$ a $W^{\mathrm{e}}_{t+1} \longrightarrow W^{\mathrm{q}}_{t+1}$ při $c \longrightarrow 0$
- $\rho_{\mathrm{e}}(c) \longrightarrow 0$ pro $c \longrightarrow \infty$, proto $W^{\mathrm{e}}_{t+1} \longrightarrow a/\tau$
- Pojistné rizika i, které je v roce t zařazeno v třídě $I_i(t)$

$$
P^{\mathrm{q,e}}_{t+1}(k_{i\bullet}(t),t) = BP_{I_i(t+1)} BMF^{\mathrm{q,e}}_{t+1}(k_{i\bullet}(t),t),
$$

- $BMF^{\mathrm{q}}(k_{i\bullet}(t),t) = \frac{W^{\mathrm{q}}_{t+1}}{\mathrm{E}[\Theta]_i} = \frac{a+k_{i\bullet}(t)}{\tau+t}\frac{\tau}{a}$
- $BMF^{\mathrm{e}}(k_{i\bullet}(t),t) = \frac{W^{\mathrm{q}}_{t+1}}{\mathrm{E}[\Theta]_i} = 1 - \frac{t}{c}\log\left(1+\frac{c}{\tau+t}\right) + \log\left(1+\frac{c}{\tau+t}\right)\frac{k_{i\bullet}(t)}{c}\frac{\tau}{a}$

Výsledky: BMS - odhady v Negativně binomickém rozdělení

$\hat{a} = 0.8665$ a $\hat{\tau} = 3.9097$

k	n_k	$\hat{n}_k$	$n_k - \hat{n}_k$
0	122 628	122 713	-85
1	21 686	21 656	30
2	4 014	4 116	-102
3	832	801	31
4	224	158	66
5	68	31	37
6	17	6	11
7	7	1	6
8	7	0	7
≥ 9	0	0	0

Pozorované ŠF

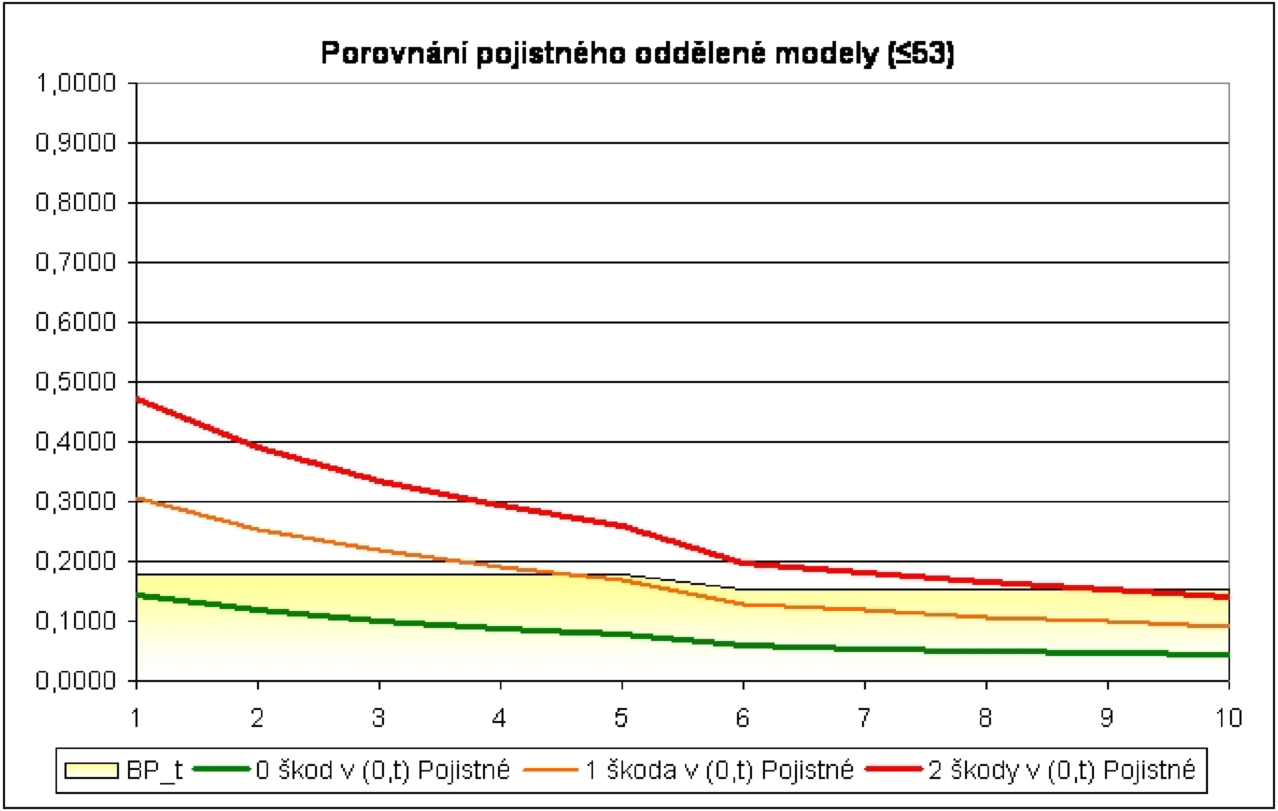
Výkon	Věk ≤ 35	Věk $35 < \bullet \leq 49$	Věk ≥ 50
≤ 53	0.1866	0.1572	0.1283
$53 < \bullet \leq 75$	0.2685	0.2279	0.1986
$75 < \bullet \leq 118$	0.2992	0.2526	0.2386
≥ 118	0.3217	0.2846	0.2483

- Kategorické proměnné pro věk J_2, J_3 a pro výkon L_2, L_3, L_4
- Každá třída je reprezentována vektorem $\boldsymbol{x}_i = (1, j_2, j_3, l_2, l_3, l_4)$
- Parametry $\boldsymbol{\beta} = (\epsilon, \gamma_2, \gamma_3, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$
- Log lineární model, Poissonovo rozdělení, logaritmický link

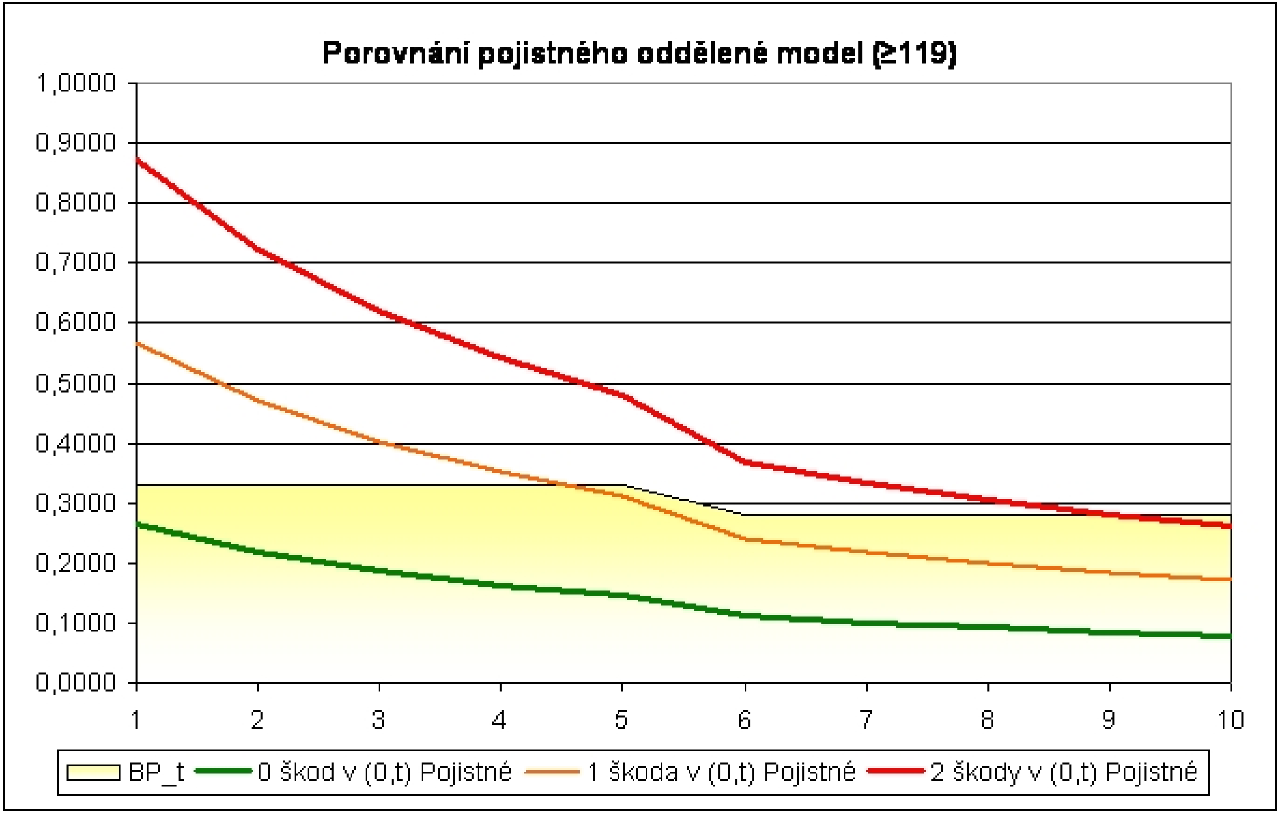
Výsledky:

Parametr	Odhad	sm. odch.
ϵ	-1.7219	0.0198
γ_2	-0.1634	0.0147
γ_3	-0.2800	0.0149
δ_2	0.3987	0.0185
δ_3	0.5324	0.0189
δ_4	0.6150	0.0236

	Věk		
Výkon	≤ 35	$35 < \bullet \leq 49$	≥ 50
≤ 53	0.1787	0.1518	0.1351
$53 < \bullet \leq 75$	0.2663	0.2262	0.2013
$75 < \bullet \leq 118$	0.3044	0.2585	0.2300
≥ 118	0.3306	0.2808	0.2498


Porovnání pojistného oddělené modely (≤53)
1,0000
0,9000
0,8000
0,7000
0,6000
0,5000
0,4000
0,3000
0,2000
0,1000
0,0000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
BP_t
0 škod v (0,t) Pojistné
1 škoda v (0,t) Pojistné
2 škody v (0,t) Pojistné

Zpět
Zavřít


Porovnání pojistného oddělené model (≥119)
1,0000
0,9000
0,8000
0,7000
0,6000
0,5000
0,4000
0,3000
0,2000
0,1000
0,0000
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
BP_t
0 škod v (0,t) Pojistné
1 škoda v (0,t) Pojistné
2 škody v (0,t) Pojistné

Zpět
Zavřít

Komplexní model

- Nechť je $K_{it} \sim Po(\lambda_{I_i(t)})$ počet škod rizika i v roce t, kde $I_i(t)$ je příslušný index třídy a $\lambda_{I_i(t)}$ jsou jejich ŠF
- Rozptyl pozorování je však větší než střední hodnota, předpoklad Poissona není korektní
- Raději předpokládáme $K_{it} \sim Po(\lambda_{I_i(t)}\Theta_i)$, kde $\Theta_i \sim \Gamma(\alpha, \alpha)$
- Potom $K_{it}|I_i(t)$ má negativně binomické rozdělení

$$\mathrm{P}\left(K_{it} = k|I_i(t)\right) = \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{\lambda_{I_{i(t)}}}{\alpha + \lambda_{I_{i(t)}}}\right)^k \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_{I_{i(t)}}}\right)^\alpha$$

- $\Theta_i|K_{i1} = k_{i1}, \ldots, K_{it} = k_{it} \sim \Gamma(\alpha + k_{i\bullet}(t), \alpha + \lambda_{i\bullet}(t))$
- Parametr α odhadneme metodou maximální věrohodnosti

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{12} \prod_{k=0}^{k_{\max}^{(i)}} \left\{ \binom{\alpha + k - 1}{k} \left(\frac{\lambda_{I_{i(t)}}}{\alpha + \lambda_{I_{i(t)}}}\right)^k \left(\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_{I_{i(t)}}}\right)^\alpha \right\}^{n_{ik}}$$

- Pojistné

$$P_{t+1}^{\mathrm{q,e}} = \lambda_{I_i(t+1)} BMF_{t+1}^{\mathrm{q,e}}(k_{i\bullet}(t), \lambda_{i\bullet}(t))$$

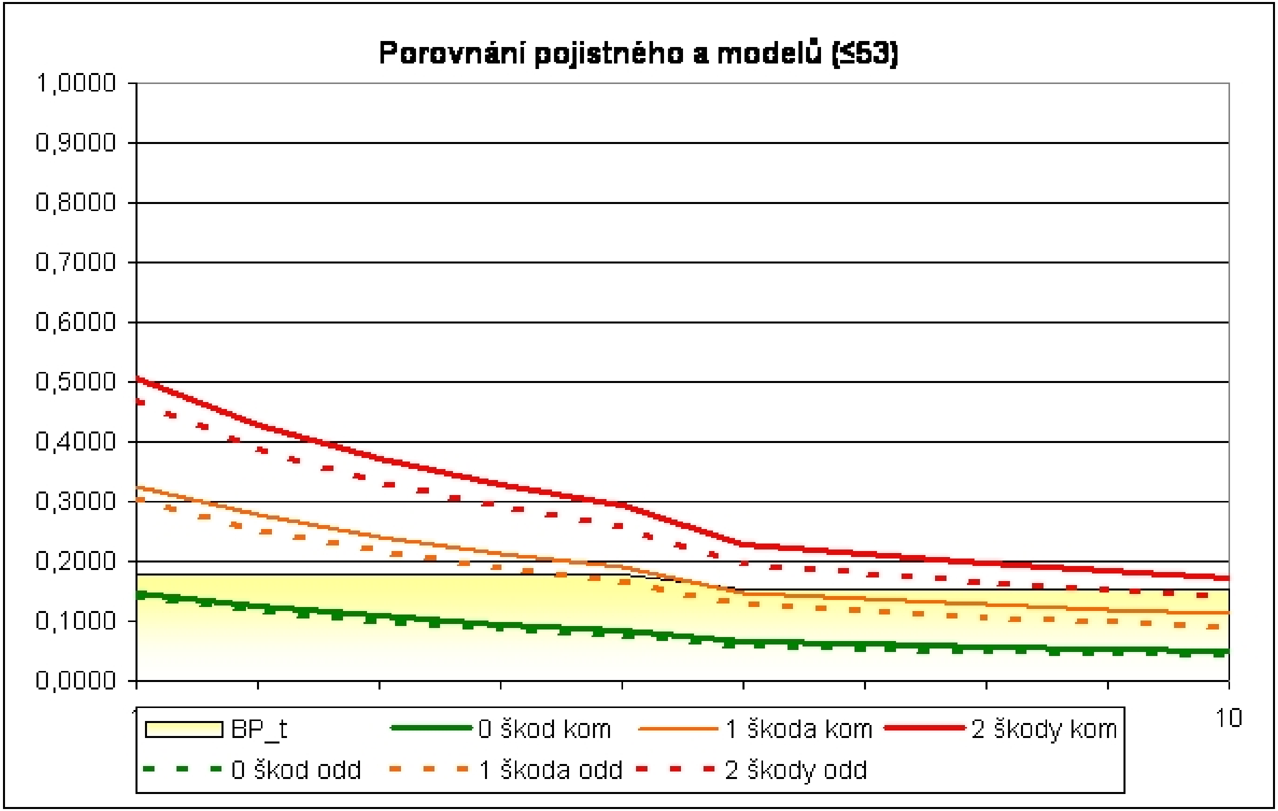
- Relativní výše bunusu—malusu

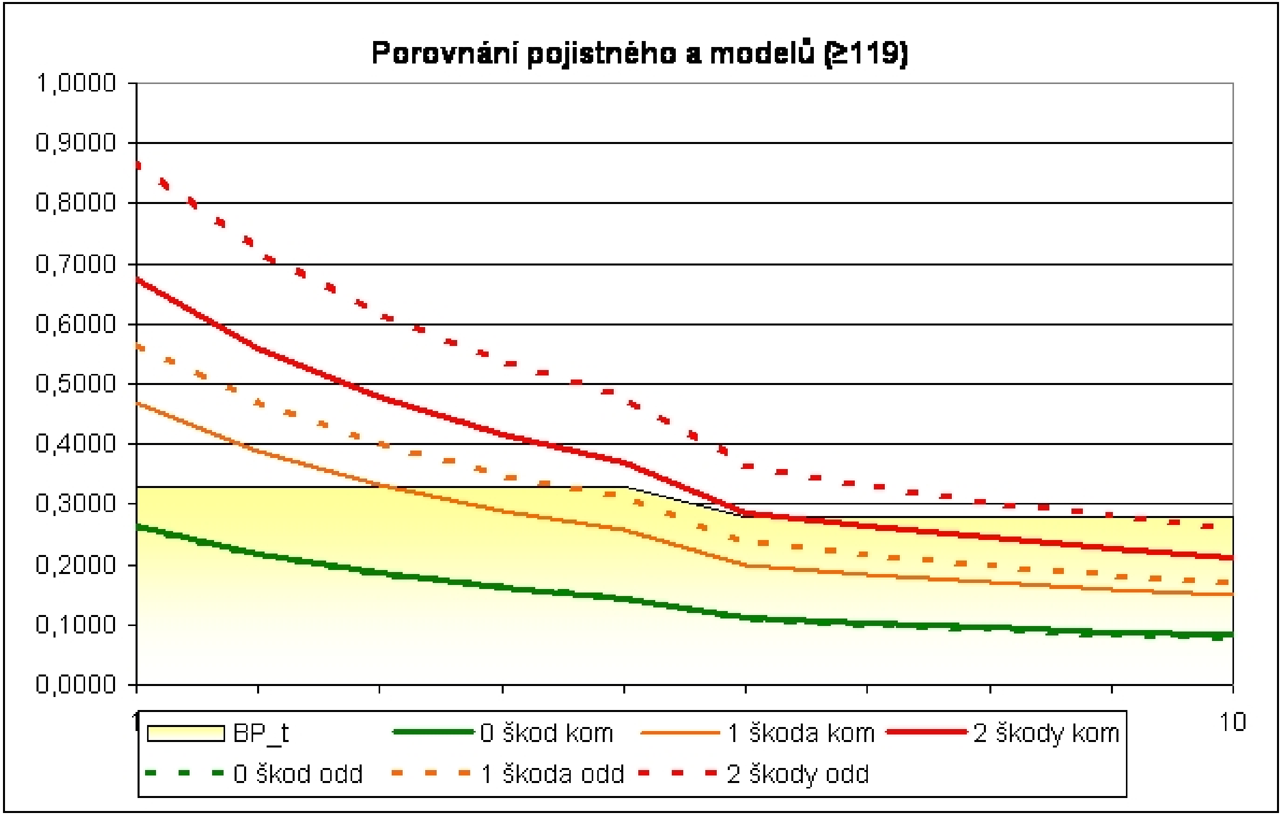
$$BMF_{t+1}^{\mathrm{q,e}}(k_{i\bullet}(t), t) = (1 - \rho_{\mathrm{q,e}}) + \rho_{\mathrm{q,e}} \frac{k_{i\bullet}(t)}{\lambda_{i\bullet}(t)}$$

- Váhy pro kvadratickou a exponenciální ztrátovou funkci

$$\rho_{\mathrm{q}} = \frac{\lambda_{i\bullet}(t)}{\alpha + \lambda_{i\bullet}(t)} \qquad \rho_{\mathrm{e}}(c) = \frac{\lambda_{i\bullet}(t)}{c} \log\left(1 + \frac{c}{\alpha + \lambda_{i\bullet}(t)}\right)$$

- Nerovnosti a konvergence stejně jako v oddělených modelech
- $\rho_{\mathrm{e}}(c) \leq \rho_{\mathrm{q}}$
- $\rho_{\mathrm{e}}(c) \to \rho_{\mathrm{q}}$ pro $c \to 0$ a tedy $P_{t+1}^{\mathrm{e}}(k_{i\bullet}, \lambda_{i\bullet}(t)) \to P_{t+1}^{\mathrm{q}}(k_{i\bullet}, \lambda_{i\bullet}(t))$
- $\rho_{\mathrm{e}}(c) \to 0$ pro $c \to \infty$, proto $P_{t+1}^{\mathrm{e}}(k_{i\bullet}, \lambda_{i\bullet}(t)) \to \lambda_{I_i(t)}$, to znamená, že všechna rizika jedné třídy platí stejné pojistné, tj. nemáme BMS


Porovnání pojistného a modelů (≤53)
1,0000
0,9000
0,8000
0,7000
0,6000
0,5000
0,4000
0,3000
0,2000
0,1000
0,0000
10
BP_t
0 škod kom
1 škoda kom
2 škody kom
0 škod odd
1 škoda odd
2 škody odd


Porovnání pojistného a modelů (≥119)
1,0000
0,9000
0,8000
0,7000
0,6000
0,5000
0,4000
0,3000
0,2000
0,1000
0,0000
1
10
BP_t
0 škod kom
1 škoda kom
2 škody kom
0 škod odd
1 škoda odd
2 škody odd

Poznámky k SW

Statistica

- sigma parametrizace $\{-1, 1\}$
- váhy pozorování
- konstrukce modelu

Statistica

- ukázka

Literatura

➪ **L. Bermúdez, M. Denuit & J. Dhaene (2001)** *Exponential bonus-malus systems integrating a priori risk classification.* Journal of Actuarial Practice 9, 84-112.

Děkuji za pozornost