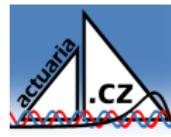


Modelování závislostní struktury dvourozměrných procesů škod

Aktuárský seminář



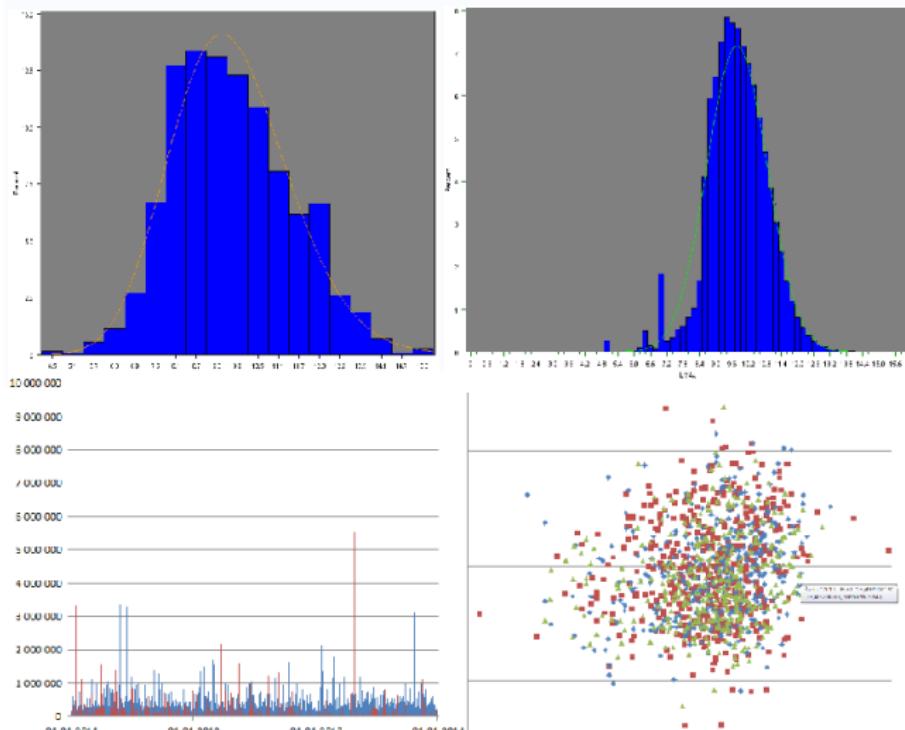
Ondřej Honzl

email: ohonzl@koop.cz

Kooperativa pojišťovna, a.s., Vienna Insurance Group
20. listopad 2015

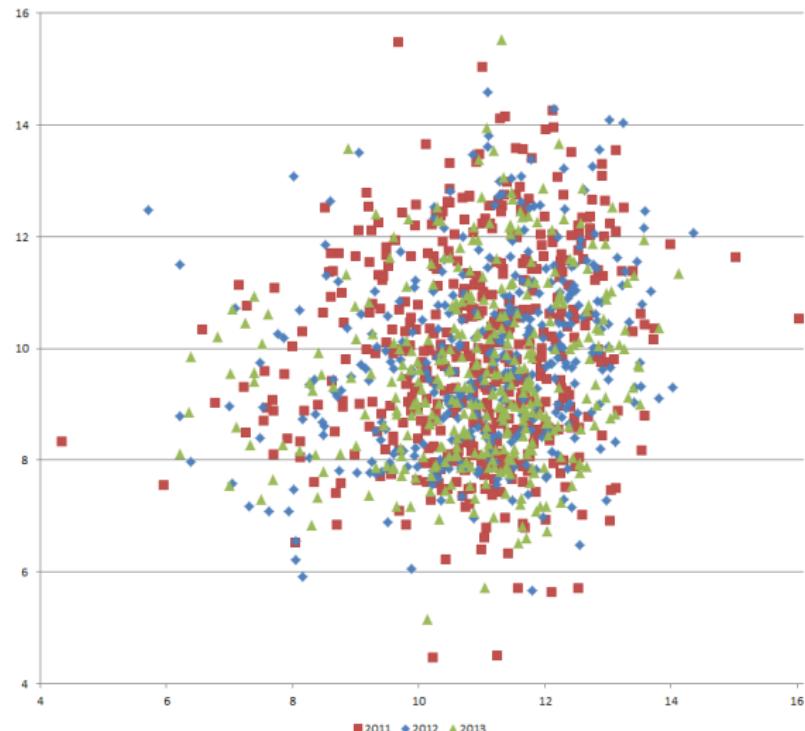
Ochutnávka dat

Data z povinného ručení rozdělená na **Zdraví** a **Majetek**



Data z povinného ručení

Logaritmus škod



Data z povinného ručení

Jak bychom se na data dívali selským rozumem? Jaké nástroje bychom použili:

Data z povinného ručení

Jak bychom se na data dívali selským rozumem? Jaké nástroje bychom použili:

- Lineární regrese

Data z povinného ručení

Jak bychom se na data dívali selským rozumem? Jaké nástroje bychom použili:

- Lineární regrese
- Zobecněné lineární modely (GLM)

Data z povinného ručení

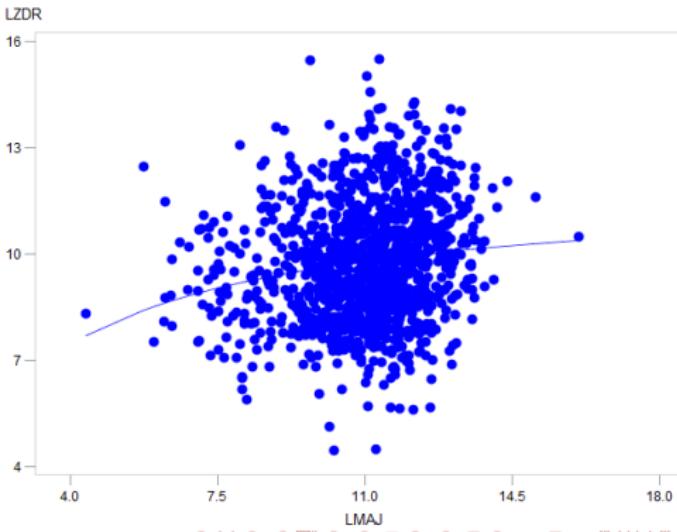
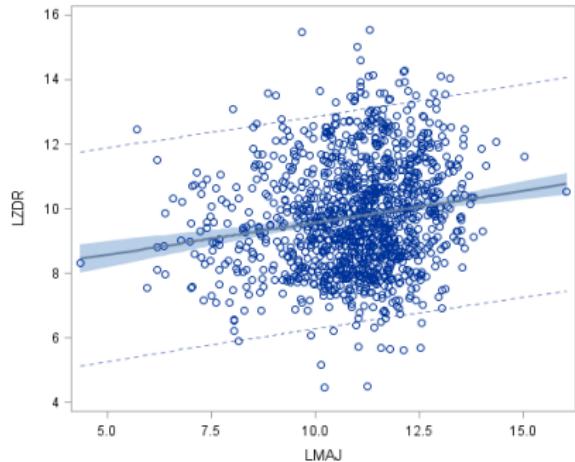
Jak bychom se na data dívali selským rozumem? Jaké nástroje bychom použili:

- Lineární regrese
- Zobecněné lineární modely (GLM)
- Další nápady?!

Data z povinného ručení

Jak bychom se na data dívali selským rozumem? Jaké nástroje bychom použili:

- Lineární regrese
- Zobecněné lineární modely (GLM)
- Další nápady?!



Dvouzměrný složený Poissonův proces

Dvouzměrný náhodný proces $(S(t))_{t \geq 0} = (S_1(t), S_2(t))_{t \geq 0}$ je *složený Poissonův proces* jestliže:

$$S(t) = \left(\sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \right),$$

$(X_i, Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jsou nezávislé stejně rozdělené náhodné dvouzměrné vektory a kde $N(t)$ je *homogenní Poissonův proces* s intenzitou $\lambda > 0$, tj.

$$\mathbb{P}[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

Charakteristická funkce dvouzměrného složeného Poissonova procesu je následující:

$$\mathbb{E} \left[e^{i\langle z, S(t) \rangle} \right] = \exp \left\{ t \int_{R^2} \left(e^{i\langle z, x \rangle} - 1 \right) \Pi(dx) \right\},$$

kde Π je *Lévyho míra* na R^2 .

Dvourozměrný složený Poissonův proces

Označíme-li σ sdružené rozdělení skoků, potom platí $\Pi(dx) = \lambda\sigma(dx)$. Takže charakteristickou funkci lze přepsat na:

$$\mathbb{E} \left[e^{i\langle z, S(t) \rangle} \right] = \exp(\lambda t[\hat{\sigma}(z) - 1]),$$

přičemž $\hat{\sigma}$ značí charakteristickou funkci rozdělení σ .

Co se dnes dozvímě?

- **Otzky**

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?
- Jak modelovat závislost složek vícerozměrného Lévyho procesu?

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?
- Jak modelovat závislost složek vícerozměrného Lévyho procesu?
- Jak je možné z takového procesu simulovat data?

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?
- Jak modelovat závislost složek vícerozměrného Lévyho procesu?
- Jak je možné z takového procesu simulovat data?
- Jak odhadovat závislostní strukturu z našich dat?

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?
- Jak modelovat závislost složek vícerozměrného Lévyho procesu?
- Jak je možné z takového procesu simulovat data?
- Jak odhadovat závislostní strukturu z našich dat?
- Uvidíme nějaký příklad z pojistné praxe?

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?
- Jak modelovat závislost složek vícerozměrného Lévyho procesu?
- Jak je možné z takového procesu simulovat data?
- Jak odhadovat závislostní strukturu z našich dat?
- Uvidíme nějaký příklad z pojistné praxe?

Odpovědi

Co se dnes dozvímě?

Otzky

- Co je to Lévyho proces?
- Jak modelovat závislost složek vícerozměrného Lévyho procesu?
- Jak je možné z takového procesu simulovat data?
- Jak odhadovat závislostní strukturu z našich dat?
- Uvidíme nějaký příklad z pojistné praxe?

Odpovědi

- ...

Obsah

1 Úvod

2 Lévyho procesy

- Definice
- Vlastnosti – charakterizace, rozdělení, dekompozice, ...
- Příklady

3 Závislostní struktura

- Kopule – připomenutí
- Lévyho kopule – definice, příklady

4 Simulace dat – subordinátorů

5 Odhad parametrů Lévyho kopulí z dat

- Maximálně věrohodný odhad
- Data z povinného ručení

Lévyho procesy – kde se používají?

Aplikace Lévyho procesů

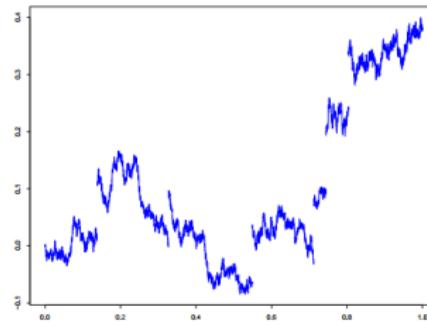
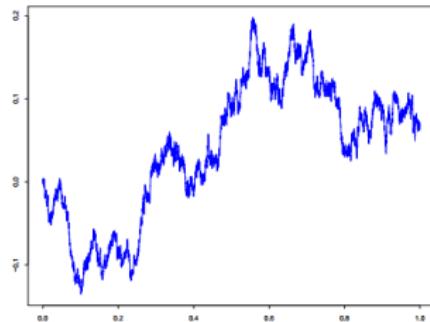
Lévyho procesy jsou dnes stále více užívány ve světě finančních modelů a pojišťovnictví. Především negaussovské a skokové Lévyho procesy mají využití v oblasti stochastické diferenciální geometrie, která je přímo aplikovatelná na nejrůznější finanční modely. Další aplikace lze nalézt v telekomunikacích, seismologii, kvantové teorii nebo meteorologii...

Aktuárská sféra

- Alokace aktiv a pasiv (ALM)
- Teorie ruinování
- Víceroměrné škody – odhady rezerv, výše škod, apod.
- Operační riziko, kreditní riziko, tržní riziko, Option pricing
- Aproximace VaR

Lévyho procesy – Definice

Lévyho procesy dnes nesou jméno po francouzském matematikovi *Paulu Pierru Lévym* (1886 – 1971). Dříve se o nich hovořilo jako o třídě procesů s nezávislými přírůstky.



Definice

Dvourozměrný proces $(X_t)_{t \geq 0}$ nazveme *Lévyho procesem*, jestliže má càdlàg trajektorie, je stochasticky spojitý, startuje v nule a má nezávislé stacionární přírůstky.

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $X_0 \equiv 0$.

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $X_0 \equiv 0$.
- ii) (*Nezávislost přírůstků*): Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou náhodné vektory $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $X_0 \equiv 0$.
- ii) (*Nezávislost přírůstků*): Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou náhodné vektory $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.
- iii) (*Stacionární přírůstky*): Pro každé $h \geq 0$ rozdělení $X_{t+h} - X_t$ nezávisí na $t \in \mathbb{R}_+$, tudíž $X_{t+h} - X_t$ a X_h mají stejné rozdělení.

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $X_0 \equiv 0$.
- ii) (*Nezávislost přírůstků*): Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou náhodné vektory $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.
- iii) (*Stacionární přírůstky*): Pro každé $h \geq 0$ rozdělení $X_{t+h} - X_t$ nezávisí na $t \in \mathbb{R}_+$, tudíž $X_{t+h} - X_t$ a X_h mají stejné rozdělení.
- iv) (*Stochastická spojitost*): Pro každé $t \geq 0$ a $\varepsilon > 0$ platí
$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0.$$

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $X_0 \equiv 0$.
- ii) (*Nezávislost přírůstků*): Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou náhodné vektory $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.
- iii) (*Stacionární přírůstky*): Pro každé $h \geq 0$ rozdělení $X_{t+h} - X_t$ nezávisí na $t \in \mathbb{R}_+$, tudíž $X_{t+h} - X_t$ a X_h mají stejné rozdělení.
- iv) (*Stochastická spojitost*): Pro každé $t \geq 0$ a $\varepsilon > 0$ platí
$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0.$$
- v) (*càdlàg trajektorie*): Pro každé $\omega \in \Omega$ je $X_t(\omega)$ zprava spojitá funkce pro $t \geq 0$ a má limity zleva.

Lévyho procesy – podrobnější definice

Definice d -rozměrný stochastický proces $\{X_t, t \geq 0\}$ nazýváme *Lévyho procesem*, jestliže splňuje následující podmínky:

- i) $X_0 \equiv 0$.
- ii) (*Nezávislost přírůstků*): Pro každé $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ jsou náhodné vektory $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ nezávislé.
- iii) (*Stacionární přírůstky*): Pro každé $h \geq 0$ rozdělení $X_{t+h} - X_t$ nezávisí na $t \in \mathbb{R}_+$, tudíž $X_{t+h} - X_t$ a X_h mají stejné rozdělení.
- iv) (*Stochastická spojitost*): Pro každé $t \geq 0$ a $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathbb{P}[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0.$$
- v) (*càdlàg trajektorie*): Pro každé $\omega \in \Omega$ je $X_t(\omega)$ zprava spojitá funkce pro $t \geq 0$ a má limity zleva.

Poznámka

Přírůstek Wienerova procesu $W_{t+h} - W_t$ má normální rozdělení $\mathcal{N}(0, h)$.

Přírůstek Poissonova procesu $N_{t+h} - N_t$ má Poissonovo rozdělení $Po(\lambda h)$.

Lévyho procesy – Otázky

Otázky

- Moc definici nechápu! Co si mám pod ní představit?
- Jak se takové procesy chovají?
- Jsou Lévyho procesy dostatečně širokou třídou?
- Není mi jasné, které procesy jsou Lévyho procesy a které nikoli!?
- Ukážete nám nějaké příklady Lévyho procesů?

Rozdělení v čase $t > 0$

V čase $t > 0$ má Lévyho proces *nekonečně dělitelné rozdělení*. Je-li $P_{X_1} = \mu$ rozdělení v čase 1, potom $P_{X_t} = \mu^{*t}$.

Definice Náhodná veličina Y má *nekonečně dělitelné rozdělení*, jestliže pro každé $n \geq 2$ existují nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny Y_1, \dots, Y_n takové, že $Y_1 + \dots + Y_n$ má stejně rozdělení jako Y .

Příklady

nekonečně dělitelná rozdělení:

- Poissonovo rozdělení, negativní binomické, složené Poissonovo
- Normální rozdělení, Gama rozdělení, Studentovo t -rozdělení
- Cauchyho rozdělení, Paretovo rozdělení, α -stabilní rozdělení
- deterministické rozdělení

Pozor, nekonečně dělitelná rozdělení nejsou:

- Rovnoměrné rozdělení, binomické rozdělení

Charakteristická trojice

Lévyho-Chinčinova reprezentace

Je-li μ nekonečne dělitelné rozdělení na \mathbb{R}^d , potom

$$\log \widehat{\mu}(z) = -\frac{1}{2}\langle Az, z\rangle + i\langle m, z\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{e}^{i\langle z, x\rangle} - 1 - i\langle z, x\rangle \mathbf{1}_D(x)) \nu(\mathrm{d}x), \quad (1)$$

přičemž $\langle \cdot, \cdot \rangle$ je skalární součin na \mathbb{R}^d , $m \in \mathbb{R}^d$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 1\}$ je jednotková koule. A je symetrická pozitivně semidefinitní matice typu $d \times d$ a ν je míra na \mathbb{R}^d splňující:

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ a } \int_{\mathbb{R}^d} (|x|^2 \wedge 1) \nu(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Platí dokonce opačná implikace. (Důkaz: např. [Sato (1999)])
 Trojici (m, A, ν) nazveme *charakteristickou trojicí*.

Charakteristická trojice

Poznámky

- Je-li (m, A, ν) charakteristická trojice rozdělení Lévyho procesu v čase 1, potom je $(tm, tA, t\nu)$ je charakteristická trojice rozdělení Lévyho procesu v čase t .
- Místo jednotkové koule lze brát v (1) usekávací funkci $c(x) = 1 + o(x)$. Paul Lévy, či Alexander Chinčin užívali funkci $c(x) = \frac{1}{1+|x|^2}$. Volba $c(x)$ má vliv jen na hodnotu m . Míra ν a matice A zůstanou stejné.

Lévyho procesy – složený Poissonův proces

Složený Poissonův proces

Bud' σ sdružené rozdělní skoků, pak charakteristická funkce složeného Poissonova procesu v čase $t > 0$ je:

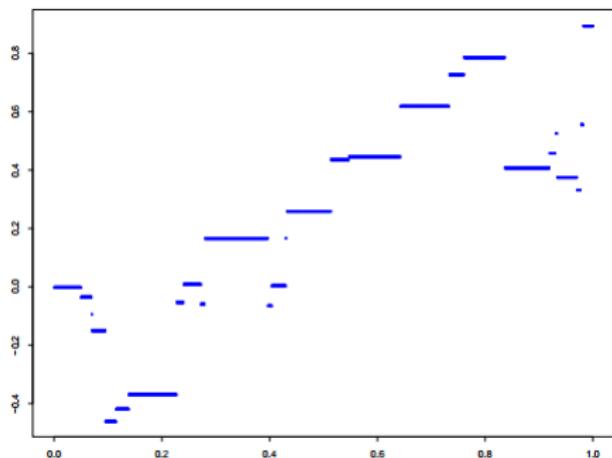
$$\widehat{\mu}(z) = \exp [\lambda t(\widehat{\sigma}(z) - 1)] = \exp \left[\lambda t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \sigma(dx) \right],$$

a tudíž charakteristická trojice je

$$\left(\int_{|x| \leq 1} x \lambda \sigma(dx), 0, \lambda \sigma \right).$$

Pokud je vezmeme $\sigma = \delta_1$ (*Diracova míra v bodě 1*) dostáváme "obyčejný" Poissonův proces s charakteristickou trojicí $(0, 0, \lambda \delta_1)$.

Lévyho procesy – složený Poissonův proces



Příklad složeného Poissonova procesu

Poznámka Lévyho proces je složený Poissonův proces právě tehdy, když jsou jeho trajektorie po částech konstantní. (Důkaz viz [Cont-tankov (2004)] Proposition 3.3.)

Lévyho-Itôova dekompozice

Lévyho proces $\{X_t, t \geq 0\}$ lze rozdělit na součet tří nezávislých procesů $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}$, přičemž logaritmy charakteristických funkcí jejich rozdělení v čase 1 jsou:

$$\begin{aligned}\psi_1(z) &= -\frac{1}{2}\langle Az, z \rangle + i\langle m, z \rangle \\ \psi_2(z) &= \int_{|x|>1} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1) \nu(dx) \\ \psi_3(z) &= \int_{|x|\leq 1} (e^{i\langle z, x \rangle} - 1 - i\langle z, x \rangle) \nu(dx),\end{aligned}$$

tj. $X^{(1)}$ je *Brownův pohyb* s kovarianční maticí A a driftem m , $X^{(2)}$ je *složený Poissonův proces* zahrnující větší než jednotkové skoky a $X^{(3)}$ je čistě skokový martingal s menšími než jednotkovými skoky (*kompenzovaný složený Poissonův proces*).

Subordinátory

Subordinátor je jednorozměrný Lévyho proces s neklesajícími trajektoriemi. Vícerozměrný proces, jehož složky jsou subordinátory nazýváme rovněž subordinátorem.

Subordinátory mají následující vlastnosti:

- **Subordinátor** nemá v Lévyho-Itôově rozkladu Brownovskou složku, a navíc:

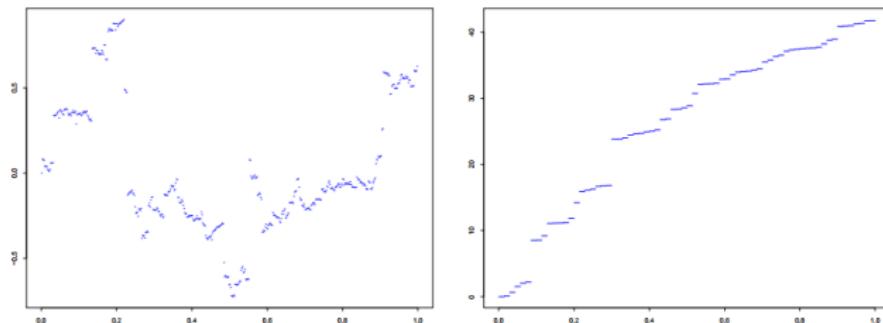
$$\nu((-\infty, 0]) = 0, \int_0^{\infty} (x \wedge 1) \nu(dx) < \infty.$$

- **Subordinátor** může mít sice nekonečnou aktivitu, ale musí mít konečnou variaci.

Subordinátory hrají důležitou roli v závislostní struktuře složek vícerozměrných Lévyho procesů (uvidíme později).

Lévyho procesy – další příklady

Lévyho procesy jsou velmi široká třída procesů. Kromě *Wienerova procesu*, *složeného Poissonova procesu* je ve finančních modelech používáný *Normální inverzní Gaussův (NIG) proces*, nebo *zobecněný hyperbolický (GH) proces*. Jak už jsme totiž výše uvedli, stačí za přírůstek Lévyho procesu uvažovat libovolné nekonečně dělitelné rozdělení.



vlevo: Normální inverzní Gaussův proces, vpravo: Inverzní Gaussův proces

Lévyho procesy – další příklady

Název	"chvosty hustoty" $t(y)$
Inverzní Gaussovo (IG)	$c \cdot y^{-3/2} \exp(-c_1 y)$
Gama	$c \cdot y^{c_1-1} \exp(-c_2 y)$
Zobecněné inverzní Gaussovo (GIG)	$c \cdot y^{c_1-1} \exp(-c_2 y^{-1} - c_3 y)$
Normální inverzní Gaussovo (NIG)	$c \cdot y^{-1} K_1(c_1 y) \exp(c_2 y)$
Zobecněné hyperbolické (GH)	$c \cdot y^{c_1-1/2} K_{c_1-1/2}(c_2 y) \exp(c_3 y)$
α -stabilní	$\approx c \cdot y^{-1-\alpha}$

$c, c_i, i = 1, 2, 3$ kladné konstanty, $K(\cdot)$ – modifikovaná Besselova funkce 2. druhu. Např. Zobecněné inverzní gaussovo rozdělení má hustotu:

$$\frac{(\gamma\delta)^\nu}{2K_\nu(\delta\gamma)} y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}(\delta^2 y^{-1} + \gamma^2 y)\right).$$

Software?! V R-ku jsou k dispozici knihovny **ghyp**, **gig**.

[demonstrations.wolfram.com\TheNormalInverseGaussianLevyProcess\](http://demonstrations.wolfram.com/TheNormalInverseGaussianLevyProcess/)

Lévyho procesy – shrnutí

Co jsme se dozvěděli?

- Co to je Lévyho proces (definice)
- Jak je charakterizováno rozdělení v čase t (Lévyho-Chinčinova věta)
- Jakou strukturu mají trajektorie Lévyho procesů (Lévyho-Itôův rozklad)
- Co je to subordinátor
- Příklady Lévyho procesů

Obsah

1 Úvod

2 Lévyho procesy

- Definice
- Vlastnosti – charakterizace, rozdělení, dekompozice, ...
- Příklady

3 Závislostní struktura

- Kopule – připomenutí
- Lévyho kopule – definice, příklady

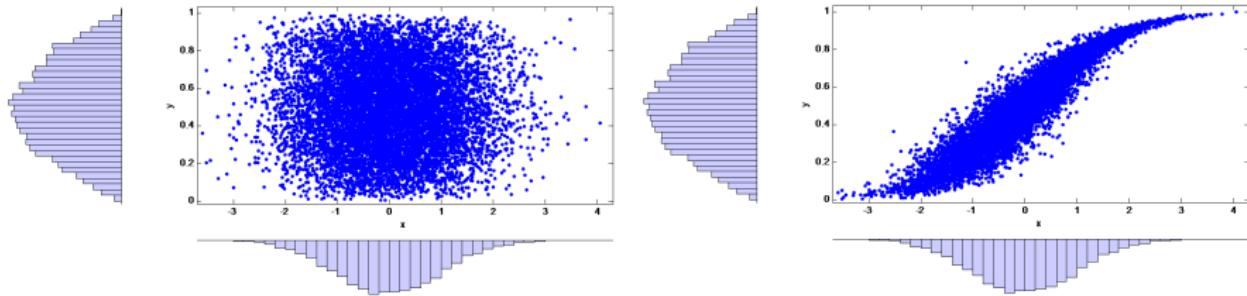
4 Simulace dat – subordinátorů

5 Odhad parametrů Lévyho kopulí z dat

- Maximálně věrohodný odhad
- Data z povinného ručení

Proč studovat závislost složek?

Zdání klame!



J. L. van Velsen, Parameter estimation of a Levy copula of a discretely observed bivariate compound Poisson process with an application to operational risk modelling, arXiv:1212.0092

Kopule – připomenutí

Zopakujeme něco málo z teorie kopulí.

Definice

Funkci $C : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ nazveme *(2-rozměrnou) kopulí* jestliže:

- Její marginály jsou identity, tj.

$$C(x, 1) = x, C(x, 0) = 0, C(1, y) = y, C(0, y) = 0, x, y \in [0, 1],$$

- C je 2-rostoucí funkce, tj. pro každý interval $(a, b] = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \in [0, 1]^2$ platí:

$$C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2) \geq 0.$$

Kopule - Sklarova věta

Věta (Sklar 1959)

Pro dvourozměrnou distribuční funkci G s marginály G_1, G_2 existuje kopule C , která pro všechna x, y z definičního oboru $G_i, i = 1, 2$ splňuje rovnost:

$$G(x, y) = C(G_1(x), G_2(y)). \quad (2)$$

Jsou-li navíc G_1, G_2 spojité, je kopule C určena jednoznačně.

Naopak je-li C dvourozměrná kopule a G_1, G_2 distribuční funkce, potom je funkce G definovaná výrazem (2) dvourozměrná distribuční funkce s marginálními funkcemi G_1, G_2 .

Důkaz viz [Nelsen (1998)], Theorem 2.10.9.

Kopule - omezení, nezávislost, komonotonie,...

Kopule jsou zdola a shora omezené tzv. *Fréchetovými-Hoeffdingovými* mezemi:

$$W(x, y) \leq C(x, y) \leq M(x, y),$$

přičemž

$$M(x, y) = \min(x, y),$$

$$\Pi(x, y) = xy,$$

$$W(x, y) = \max(x + y - 1, 0),$$

Dále platí:

- Dvourozměrné rozdělení má kopuli Π právě tehdy, když má nezávislá marginální rozdělení.
- Kopule M odpovídá komonotonii a W kontramonotonii.

Příklady kopulí

Uved'me příklady dvourozměrných kopulí, o kterých dnes budeme mluvit

- *Claytonova rodina kopulí:*

$$C_C(x, y) = \left[\max \left(x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1, 0 \right) \right]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}. \quad (3)$$

Mezní chování pro různá θ : $C_{\theta=-1} = W$, $C_{\theta=0} = \Pi$, $C_{\theta=\infty} = M$.

- *Aliho-Mikhailova-Haqova rodina kopulí:*

$$C_{AMH}(x, y) = \frac{xy}{1 - \theta(1-x)(1-y)}, \quad \theta \in [-1, 1), \quad (4)$$

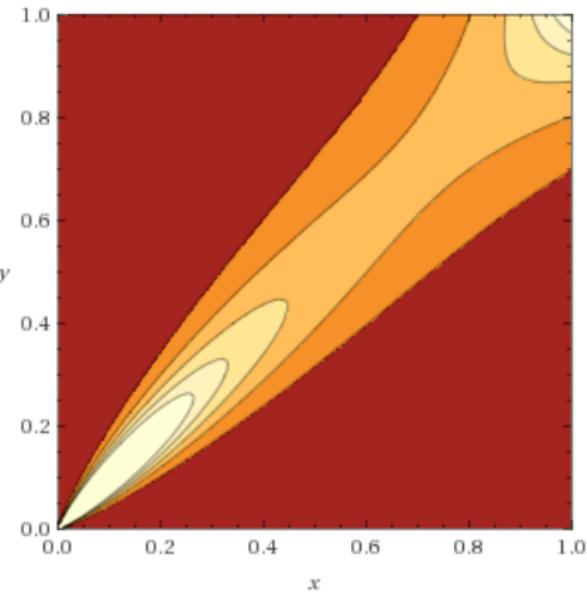
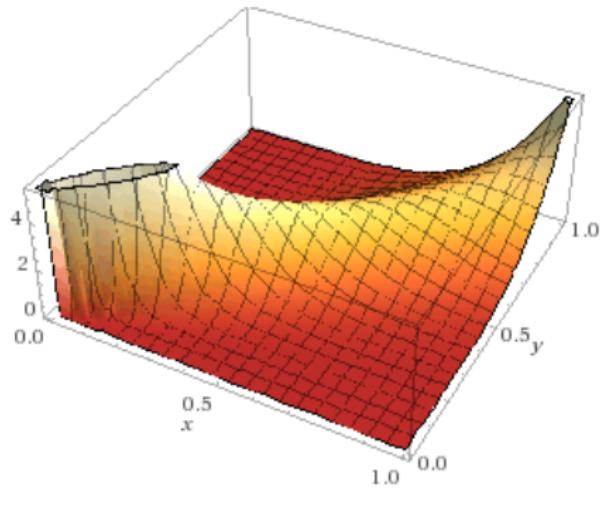
Mezní chování pro různá θ : $C_{\theta=0} = \Pi$.

- *Gumbelova-Hougaardova rodina kopulí:*

$$C_{GH}(x, y) = \exp \left\{ - \left[(-\log x)^\theta + (-\log y)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\}, \quad \theta \in [1, \infty), \quad (5)$$

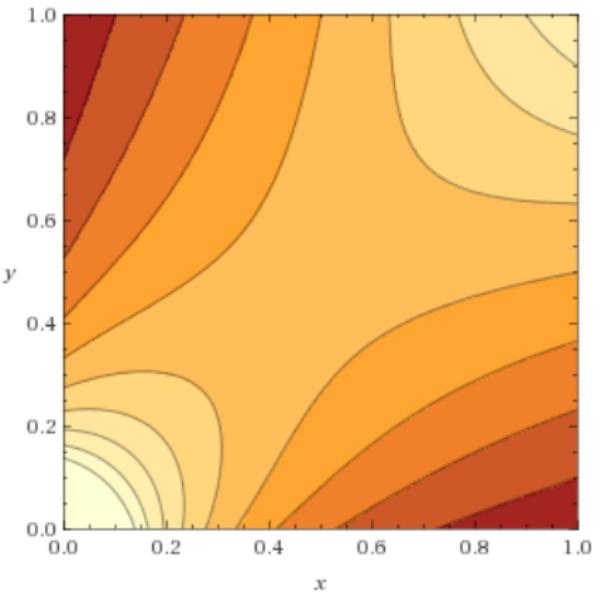
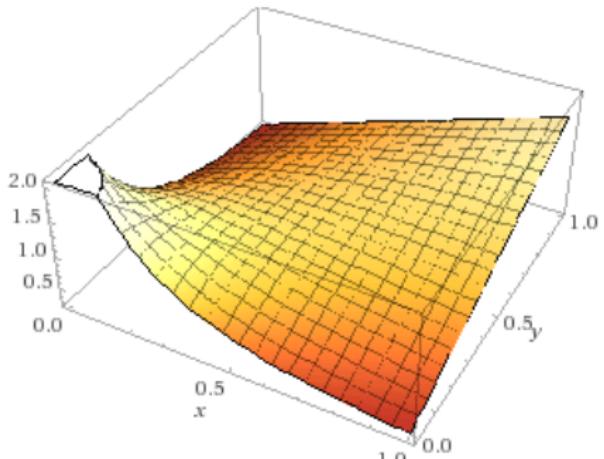
Mezní chování pro různá θ : $C_{\theta=1} = \Pi$, $C_{\theta=\infty} = M$

Příklady kopulí



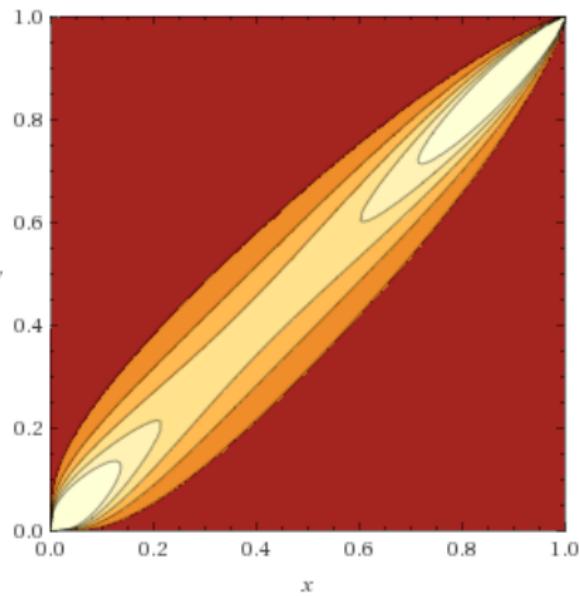
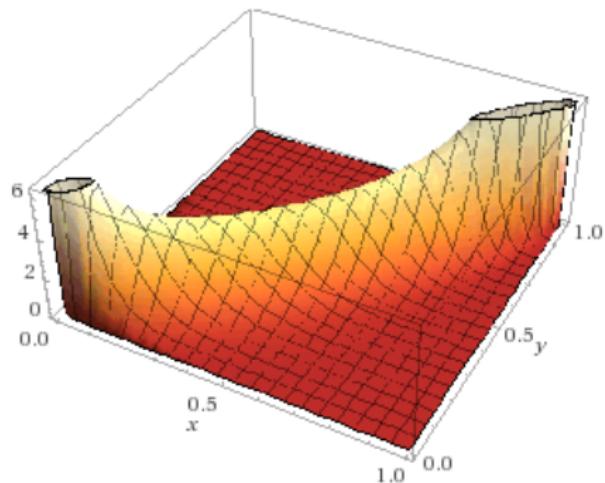
hustota Claytonovy kopule $\theta=5$

Příklady kopulí



hustota AMH kopule $\theta=0.75$

Příklady kopulí



hustota GH kopulí $\theta=5$

Lévyho kopule

Definice

Funkce $\mathfrak{C} : [0, \infty]^2 \rightarrow [0, \infty]$ je *Lévyho kopule (subordinátoru)*, jestliže:

- $\mathfrak{C}(x, y) < \infty$ pro $(x, y) \neq (\infty, \infty)$.
- $\mathfrak{C}(x, 0) = 0, \mathfrak{C}(0, y) = 0$
- \mathfrak{C} je 2-rostoucí.
- Marginály kopule \mathfrak{C} jsou identity, tj. $\mathfrak{C}(x, \infty) = x, \mathfrak{C}(\infty, y) = y$

Obdoba Sklarovy věty

Zbytkový integrál nebo též *tail integrál* subordinátoru s Lévyho mírou ν je funkce $U : [0, \infty]^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: $U(x, y) = \nu([x, \infty) \times [y, \infty))$, pro $x, y \in [0, \infty)$, $U(x, \infty) = 0$, $U(\infty, y) = 0$.

Marginály zbytkového integrálu subordinátoru definujeme jako $U_1(x) = U(x, 0)$, $U_2(y) = U(0, y)$.

Věta (Cont & Tankov 2004) Je-li U zbytkový integrál subordinátoru s Lévyho mírou ν s marginálními měrami ν_1, ν_2 , potom existuje Č Lévyho kopule, že:

$$U(x, y) = \mathfrak{C}(U_1(x), U_2(y)), \text{ pro } x, y \in [0, \infty], \quad (6)$$

kde U_1, U_2 jsou zbytkové integrály Lévyho měr ν_1, ν_2 . Jsou-li U_1, U_2 spojité, potom je Lévyho kopule Č určena jednoznačně.

Pokračování:

Obdoba Sklarovy věty

Věta - dokončení Naopak je-li \mathfrak{C} Lévyho kopule a jsou-li ν_1, ν_2 Lévyho míry se zbytkovými integrály U_1, U_2 , potom je U definované výrazem (6) zbytkovým integrálem dvourozměrné Lévyho míry s marginálními Lévyho měrami ν_1, ν_2 .

Důkaz viz [Cont-Tankov (2004)] Theorem 5.3.

Pokud má Lévyho kopule derivace v obou složkách, pak pišme:

$$c_1(u, v) = \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{C}(x, y) \Big|_{x=u, y=v}, \quad c_2(u, v) = \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{C}(x, y) \Big|_{x=u, y=v}$$

$$c_{12}(u, v) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathfrak{C}(x, y) \Big|_{x=u, y=v}$$

Lévyho kopule s hustotou c_{12} hrají důležitou roli (uvidíme níže).

Lévyho kopule - Nezávislost, komonotonie

Nezávislost

$$\mathfrak{C}_{\perp}(x, y) = x \mathbf{1}_{\{y=\infty\}} + y \mathbf{1}_{\{x=\infty\}}, \quad x, y \in [0, \infty]$$

"Totální" závislost (komonotonie)

$$\mathfrak{C}_{\parallel}(x, y) = \min(x, y), \quad x, y \in [0, \infty]$$

Srovnej s "obyčejnými" kopulemi!

Lévyho kopule – konstrukce

Uved' me dvě možné metody, jak je možné konstruovat Lévyho kopule.

Tvrzení 1 Bud' C dvourozměrná kopule a bud' f rostoucí konvexní funkce, $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$, $f(0) = 0$, $f(1) = \infty$. Potom:

$$\mathfrak{C}(x, y) = f(C(f^{-1}(x), f^{-1}(y))) \quad (7)$$

definuje dvourozměrnou Lévyho kopuli.

Tvrzení 2 Bud' ϕ klesající konvexní funkce taková, že $\phi : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, $\phi(0) = \infty$ a $\phi(\infty) = 0$. Potom:

$$\mathfrak{C}(x_1, x_2) = \phi^{-1}(\phi(x_1) + \phi(x_2)) \quad (8)$$

definuje dvourozměrnou Lévyho kopuli.

Příklady Lévyho kopulí - "Archimedes"

Když ve Tvrzení 2 ve vzorci (8) uvažujeme postupně funkce:

Clayton $\phi_C(z) = z^{-\theta}, \theta > 0$

Gumbel $\phi_G(z) = e^{-\theta z} - 1, \theta > 0$

Inverse Gumbel $\phi_{\bar{G}}(z) = \exp(z^{-\theta}) - 1, \theta > 0$

Tankov $\phi_T(z) = e^{-\theta z} / (1 - e^{-\theta z}), \theta > 0$

Böcker-Klüppelberg $\phi_{BK}(z) = (e^z - 1)^{-\theta}, \theta > 0$

dostaneme následující Lévyho kopule:

Clayton $\mathfrak{C}_C(x, y) = (x^{-\theta} + y^{-\theta})^{-1/\theta}$

Gumbel $\mathfrak{C}_G(x, y) = \exp\{[(\log(x+1))^{-\theta} + (\log(y+1))^{-\theta}]^{-1/\theta}\}$

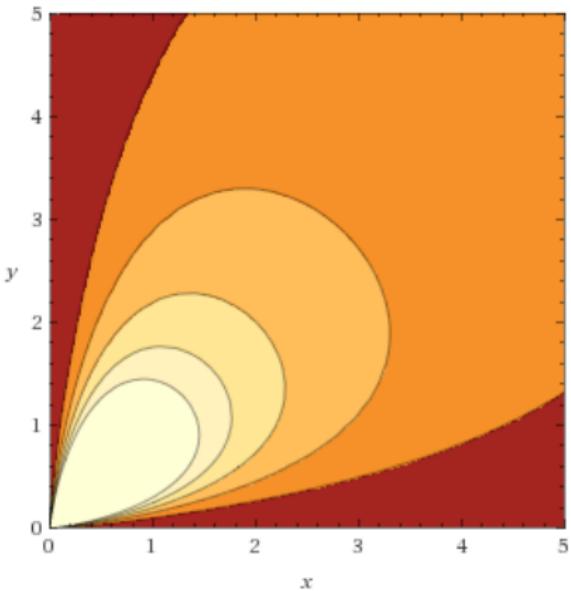
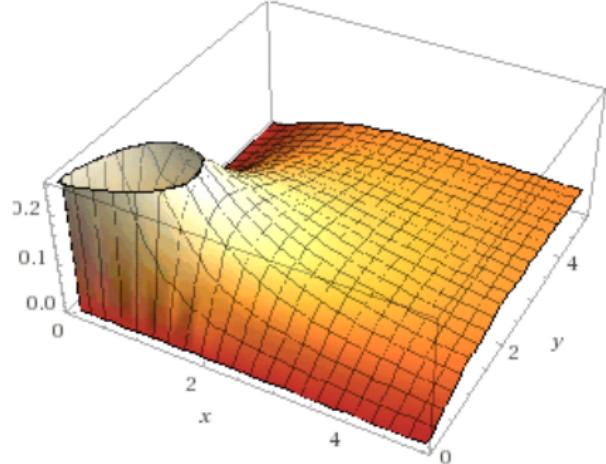
Inverse Gumbel $\mathfrak{C}_{\bar{G}}(x, y) = \{\log[\exp(x^{-\theta}) + \exp(y^{-\theta}) - 1]\}^{-1/\theta}$

Tankov $\mathfrak{C}_T(x, y) = \theta^{-1}(\log(e^{\theta(x+y)} - 1) - \log(e^{\theta x} + e^{\theta y} - 2))$

Böcker-Klüppelberg

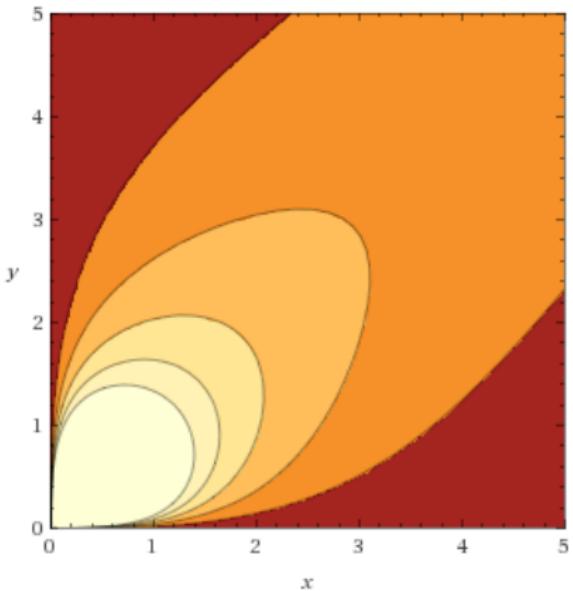
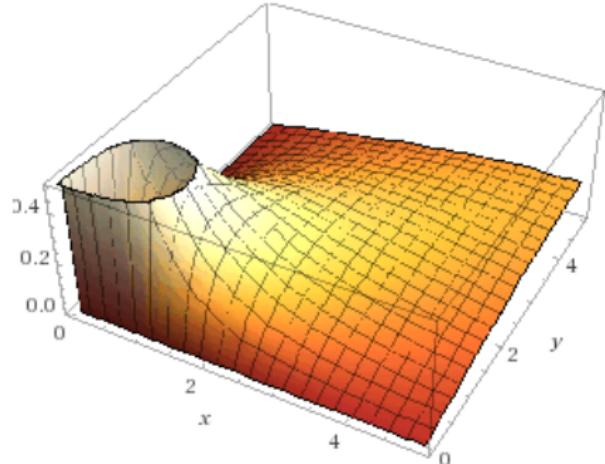
$\mathfrak{C}_{BK}(x, y) = \log\{[(e^x - 1)^{-\theta} + (e^y - 1)^{-\theta}]^{-1/\theta} + 1\}$

Příklady Lévyho kopulí



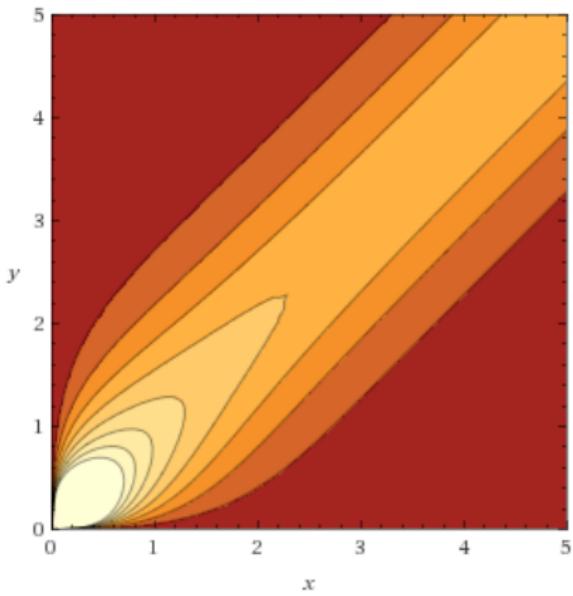
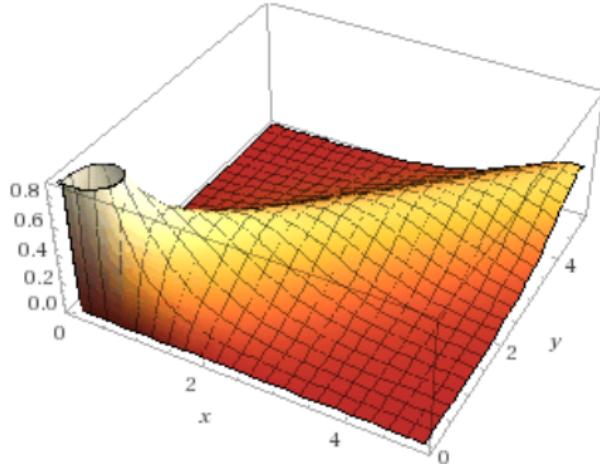
hustota Lévyho-Claytonovy kopule $\theta=5$

Příklady Lévyho kopulí



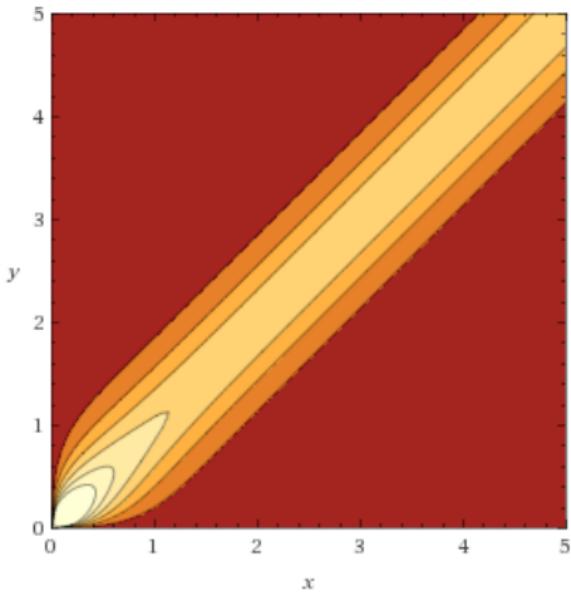
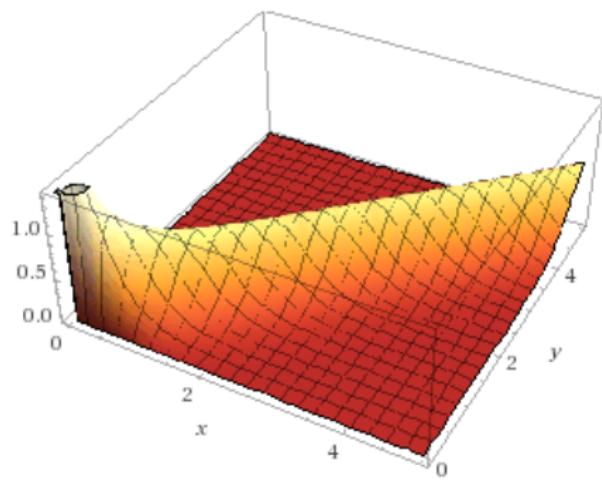
hustota Lévyho-Takovova kopule $\theta=0.5$

Příklady Lévyho kopulí



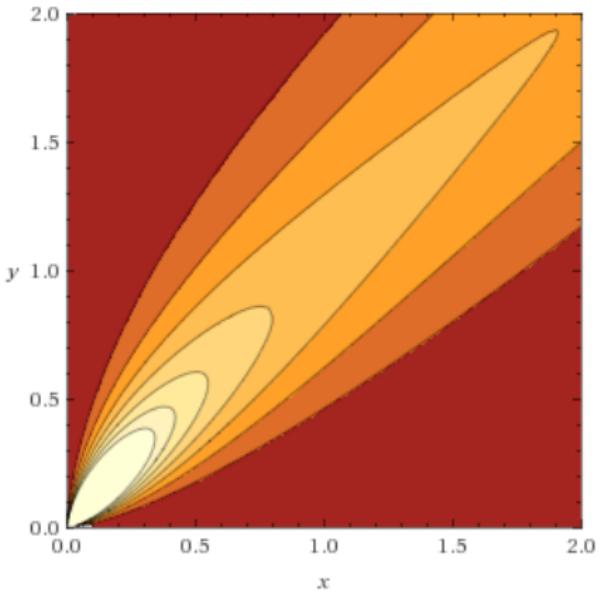
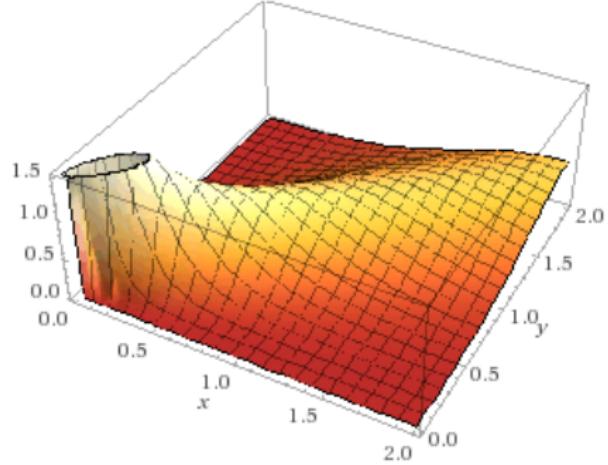
hustota Lévyho-Takovova kopule $\theta=1.5$

Příklady Lévyho kopulí



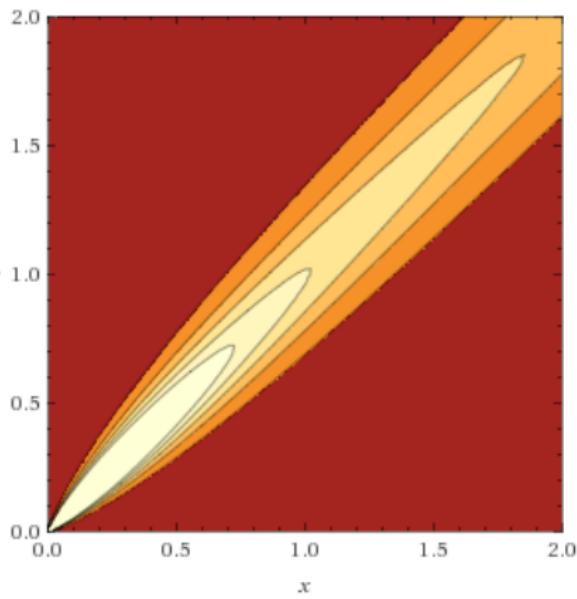
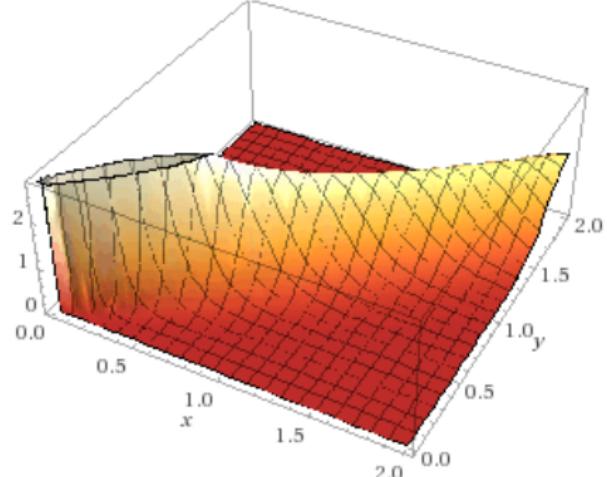
hustota Lévyho-Takovova kopule $\theta=3$

Příklady Lévyho kopulí



hustota Lévyho-BK kopule $\theta=2$

Příklady Lévyho kopulí



hustota Lévyho-BK kopule $\theta=5$

Lévyho kopule odvozené z "obyčejných" kopulí

Použijme "obyčejné" kopule (Clayton, AMH, GH) a Tvrzení 1 na funkce

a) $f(x) = -\log(1 - x)$:

Clayton(log)

$$\mathfrak{C}(x, y) = -\log(1 - [(1 - e^{-x})^{-\theta} + (1 - e^{-y})^{-\theta}]^{-1/\theta})$$

Ali-Mikhail-Haq(log)

$$\mathfrak{C}(x, y) = \log(e^{x+y} - \theta) - \log(e^x + e^y - \theta - 1)$$

Gumbelova-Hougaard(log)

$$\mathfrak{C}(x, y) = -\log\{1 - \exp(-[(-\log(1 - e^{-x}))^\theta + (-\log(1 - e^{-y}))^\theta]^{1/\theta})\}$$

b) $f(x) = x/(1 - x)$:

Clayton(frac)

$$\mathfrak{C}(x, y) = \{[(x+1)/x]^\theta + ((y+1)/y)^\theta - 1]^{1/\theta} - 1\}^{-1}$$

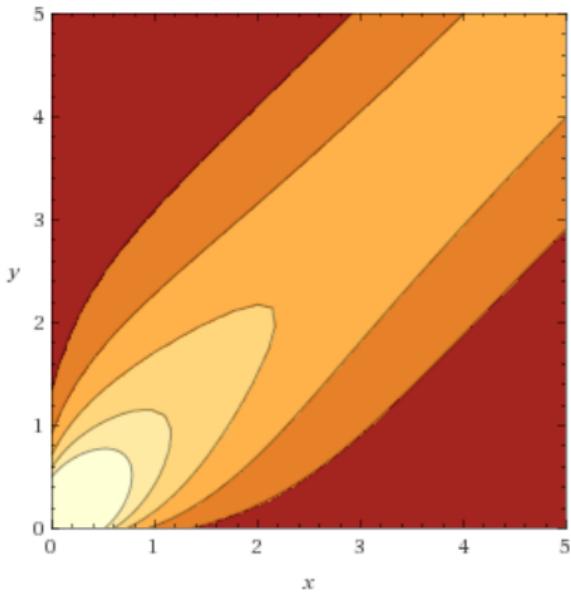
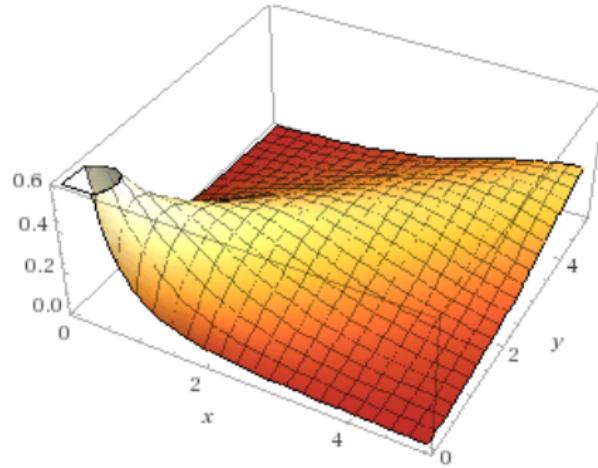
Ali-Mikhail-Haq(frac)

$$\mathfrak{C}(x, y) = xy/(x + y + 1 - \theta)$$

Gumbelova-Hougaard(frac)

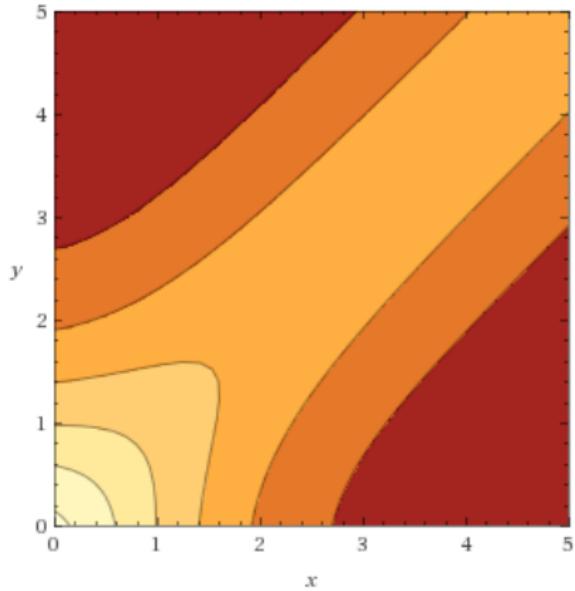
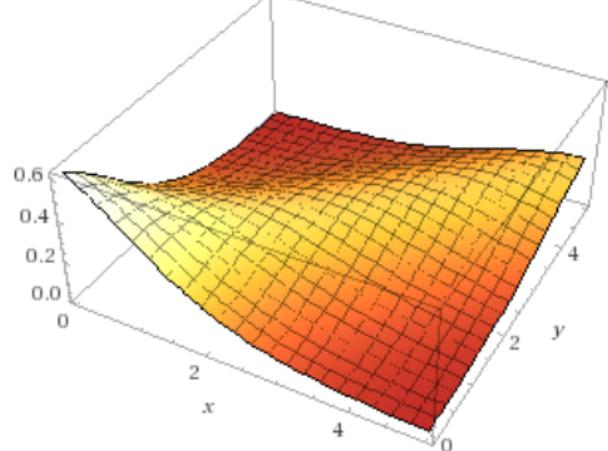
$$(\exp\{[-\log(x/(x+1))]^\theta + (-\log(y/(y+1)))^\theta\}^{1/\theta} - 1) - 1\}^{-1}$$

Příklady Lévyho kopulí



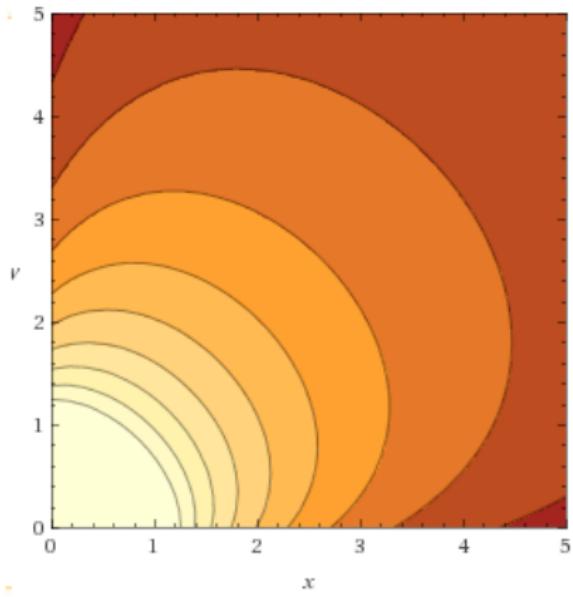
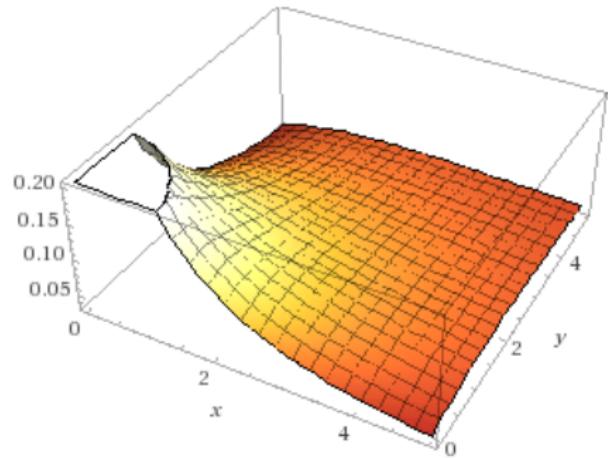
hustota Lévyho-AMH(log) kopule $\theta=0.75$

Příklady Lévyho kopulí



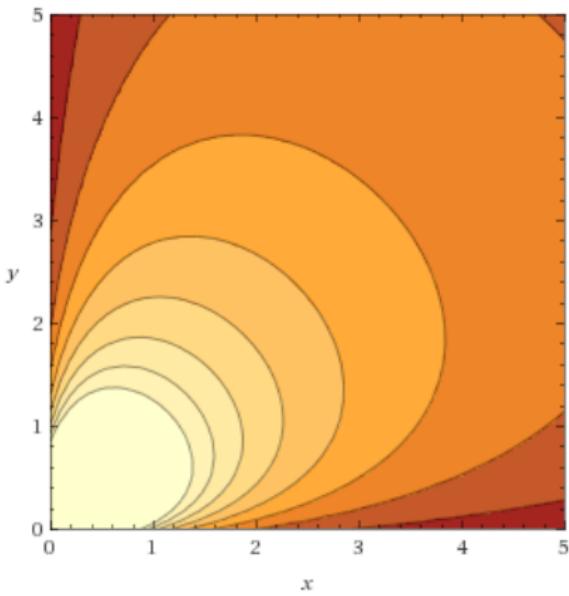
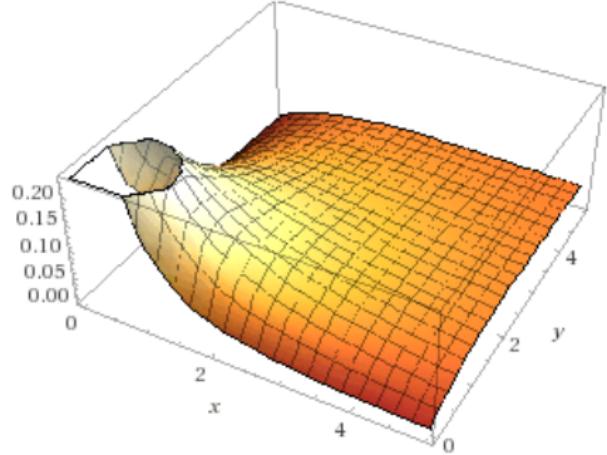
hustota Lévyho-AMH(log) kopule $\theta=-0.75$

Příklady Lévyho kopulí



hustota Lévyho-AMH(frac) kopule $\theta=0.75$

Příklady Lévyho kopulí



hustota Lévyho-AMH(frac) kopule $\theta=-0.75$

Mluvme nyní konkrétně!

Proč vlastně vytvářet nové a nové kopule?

U klasických kopulí nám hustota dává představu, jak vypadá sdružené rozdělení. Vzpomeňme na obrázky ze začátku kapitoly. **Zdání klame!**

Jenže! U Lévyho kopulí to není tak jednoduché. V obdobě Sklarovy věty figurují zbytkové integrály: $U(x, y) = \mathfrak{C}(U_1(x), U_2(y))$.

To sice říká, jak jsou závislé skoky procesů, ale interpretace není příliš zřejmá.

V případě složeného Poissonova procesu bude mnohé jednodušší.

Jsou-li intenzity složek λ_1, λ_2 a distribuční funkcemi skoků složek F_1, F_2 , potom marginálny zbytkového integrálu jsou:

$$U_i(z) = \lambda_i(1 - F_i(z)), \quad z \in (0, \infty), \quad i = 1, 2.$$

Celý zbytkový integrál lze vyjádřit jako: $U(x, y) = \lambda^{\parallel}(1 - F(x, y))$.

Takže přepis obdoby Sklarovy věty je:

$$\lambda^{\parallel}(1 - F(x, y)) = \mathfrak{C}(\lambda_1(1 - F_1(x)), \lambda_2(1 - F_2(y))).$$

Shrnutí – závislostní struktura

Co nyní víme o modelování závislosti složek dvourozměrného Lévyho procesu?

- Zopakovali jsme něco málo z „obyčejných“ kopulí pro náhodné veličiny.
- Ukázali jsme, že podobnou závislostní strukturu můžeme vytvořit i u subordinátorů.
- Viděli jsme dvě metody jak vytvářet Lévyho kopule.
- Příklady...

Obsah

1 Úvod

2 Lévyho procesy

- Definice
- Vlastnosti – charakterizace, rozdělení, dekompozice, ...
- Příklady

3 Závislostní struktura

- Kopule – připomenutí
- Lévyho kopule – definice, příklady

4 Simulace dat – subordinátorů

5 Odhad parametrů Lévyho kopulí z dat

- Maximálně věrohodný odhad
- Data z povinného ručení

Reprezentace subordinátorů

Věta (Rosinski 2001) Dvourozměrný subordinátor $\{X_t, t \geq 0\}$ se spojitou Lévyho kopulí \mathfrak{C} lze reprezentovat jako:

$$\{X_t, t \in [0, 1]\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{\tilde{X}_t = (\tilde{X}_t^{(1)}, \tilde{X}_t^{(2)}), t \in [0, 1]\},$$

kde

$$\tilde{X}_t^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} U_j^{-1}(\Gamma_i^{(j)}) \mathbf{1}_{[0, t]}(V_i), \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

pričemž $\{V_i\}_{i \geq 1}$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin rovnoměrně rozdělených na $[0, 1]$ nezávislá s ostatními posloupnostmi, $\{\Gamma_i^{(1)}\}_{i \geq 1}$ je posloupnost časů skoků Poissonova procesu s intenzitou 1, $\{\Gamma_i^{(2)}\}_{i \geq 1}$ má podmíněně při $\{\Gamma_i^{(1)}\}_{i \geq 1}$ rozdělení s distribuční funkcí $\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial x}(x, y) \Big|_{x=\Gamma_i^{(1)}}$ (jako funkce y).

Řady ve vzorci (9), $j = 1, 2$ konvergují s.j. stejnomořně pro $t \in [0, 1]$.

Algoritmus simulace

Zvolme pevně $\tau > 0$ (to určuje, že menší skoky než $U^{-1}(\tau)$ budou useknuty). Zvolme počáteční parametry $k := 0$, $\Gamma_0^{(1)} := 0$. Dokud platí $\Gamma_k^{(1)} < \tau$, opakujme:

- $k := k + 1$,
- Simulujeme $T_k \sim \text{Exp}(1)$,
- $\Gamma_{k+1}^{(1)} := \Gamma_k^{(1)} + T_k$.
- Simulujeme $\Gamma_k^{(2)}$ z distribuční funkce $\mathfrak{C}_1(y) = \frac{\partial \mathfrak{C}(x,y)}{\partial x} \Big|_{x=\Gamma_k^{(1)}}$.
- Simulujeme V_k z rovnomerného rozdelení na $[0, 1]$.

Za realizaci dvojrozměrného subordinátoru prohlásíme:

$$X_t^{(j)} = \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{\{V_i \leq t\}} U_j^{-1}(\Gamma_i^{(1)}), \quad j = 1, 2.$$

Poznámka Chyba aproximace exponenciálně klesá s rostoucím τ (ve smyslu střední hodnoty).

Příklady simulace (Clayton, AMH)

Podmíněné rozdělení (resp. inverse) v případě Lévyho-Claytonovy kopule potřebné v předchozím algoritmu je následující:

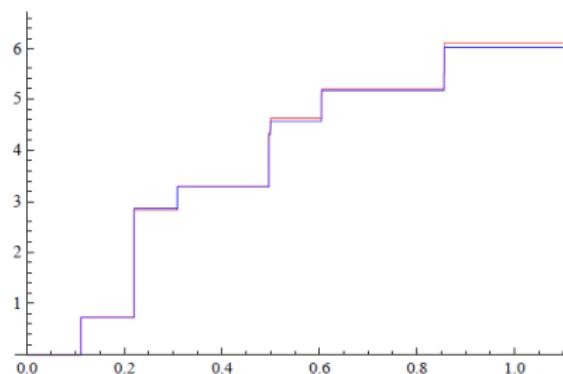
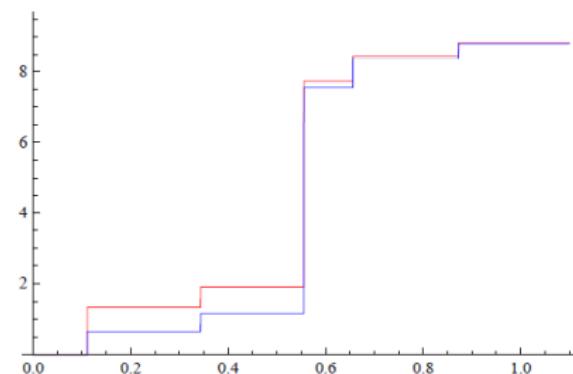
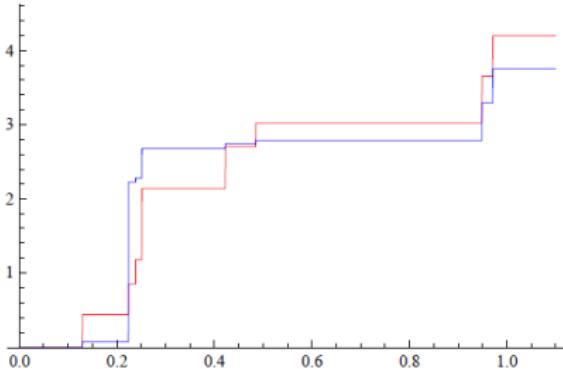
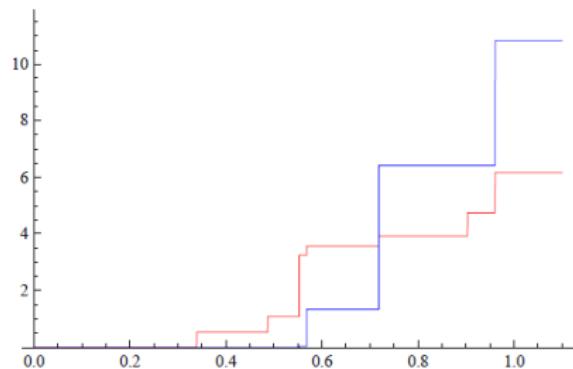
$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1(y|x) &= \frac{\partial \mathfrak{C}(x,y)}{\partial x} = \left[1 + \left(\frac{x}{y} \right)^{\theta} \right]^{\frac{\theta+1}{\theta}} \\ \mathfrak{C}_1^{-1}(y|x) &= x \left(y^{-\frac{\theta}{\theta+1}} - 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}\end{aligned}$$

Totéž pro Lévyho-AMH(frac) kopuli:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}_1(y|x) &= \frac{y(1-\theta+y)}{(1-\theta+y+x)^2} \\ \mathfrak{C}_1^{-1}(y|x) &= \frac{\theta-1+2y(1-\theta+x)+\sqrt{(1-\theta)^2+4xy(1-\theta+x)}}{2(1-y)}\end{aligned}$$

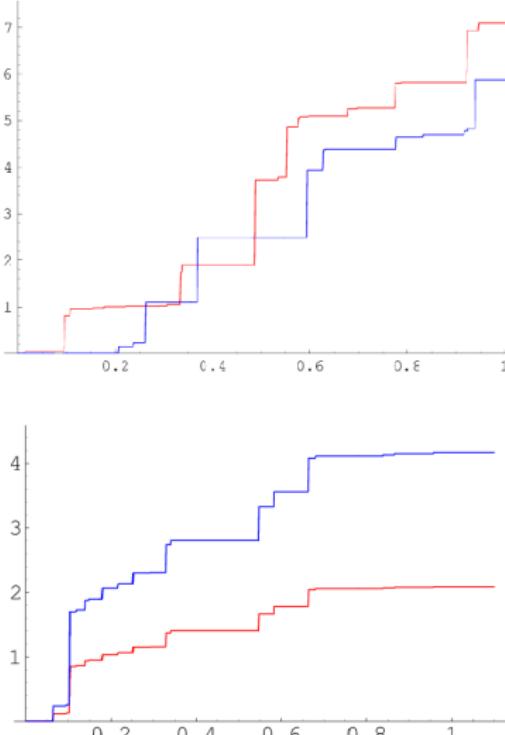
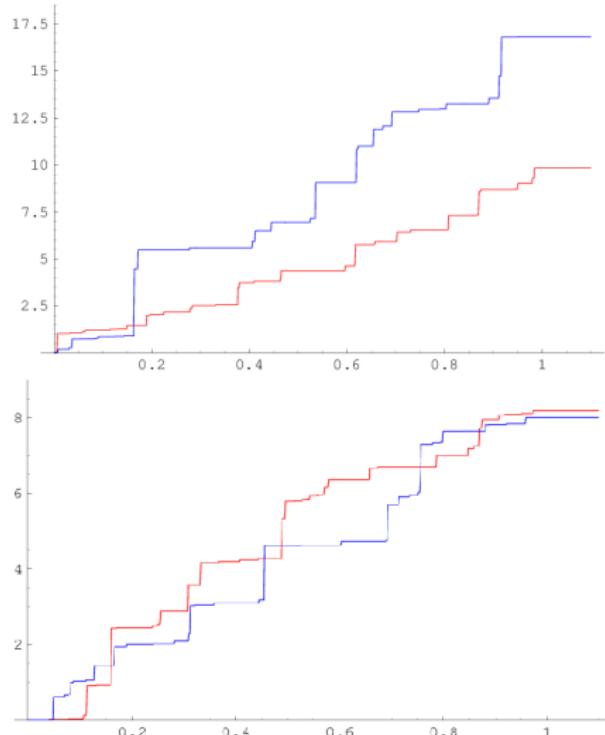
Simulace Inversního Gaussova procesu - Lévy-Clayton

$IG(\lambda = 0.5, \mu = 2), \theta_1 = 0.5, \theta_2 = 1, \theta_3 = 5, \theta_4 = 20$



Simulace Gamma procesu - Lévy-AMH(frac)

$$\Gamma(\alpha = 2, \beta = 0.5), \theta_1 = 0.25, \theta_2 = -0.5, \theta_3 = -0.75, \theta_4 = 0.05$$



Obsah

1 Úvod

2 Lévyho procesy

- Definice
- Vlastnosti – charakterizace, rozdělení, dekompozice, ...
- Příklady

3 Závislostní struktura

- Kopule – připomenutí
- Lévyho kopule – definice, příklady

4 Simulace dat – subordinátorů

5 Odhad parametrů Lévyho kopulí z dat

- Maximálně věrohodný odhad
- Data z povinného ručení

Složené Poissonovo rozdělení - odhad parametrů

Bud' $S = (S_1, S_2)$ dvourozměrný složený Poissonův proces, který pozorujeme na intervalu $[0, T]$, $T > 0$. Intenzity skoků složek nechť jsou λ_1, λ_2 a rozdělení skoků složek F_1, F_2 s hustotami $f_1(x, \theta_1), f_2(y, \theta_2)$.

Proces lze rozložit na $S = (S_1^\perp + S_1^{\parallel}, S_2^\perp + S_2^{\parallel})$, kde S_1^\perp a S_2^\perp jsou nezávislé složené Poissonovy procesy a S^{\parallel} je dvourozměrný složený Poissonův proces, jehož složky skáčí ve stejných časech.

Dále bud' $n = n_1^\perp + n_2^\perp + n^{\parallel}$ celkový počet pozorovaných skoků.

Pozorované skoky pouze v jedné proměnné označme $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n_1^\perp}$, resp. $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{n_2^\perp}$. Pozorované skoky v obou složkách označme $(x_1, y_1), \dots, (x_{n^{\parallel}}, y_{n^{\parallel}})$.

Z výše uvedeného lze zkonstruovat věrohodnostní funkci dvourozměrného složeného Poissonova procesu.

Věrohodnostní funkce

$$L(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2) =$$

$$\lambda_1^{n_1^\perp} e^{-\lambda_1^\perp T} \cdot \prod_{i=1}^{n_1^\perp} [f_1(\tilde{x}_i, \theta_1) (1 - c_1 (\lambda_1 \bar{F}_1(\tilde{x}_i, \theta_1), \lambda_2; \theta))]$$

$$\cdot \lambda_2^{n_2^\perp} e^{-\lambda_2^\perp T} \cdot \prod_{i=1}^{n_2^\perp} [f_2(\tilde{y}_i, \theta_2) (1 - c_2 (\lambda_1, \lambda_2 \bar{F}_2(\tilde{y}_i, \theta_2); \theta))]$$

$$\cdot \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda^{\parallel} T} \prod_{i=1}^{n^{\parallel}} [f_1(x_i, \theta_1) f_2(y_i, \theta_2) c_{12} (\lambda_1 (\bar{F}_1(x_i, \theta_1), \lambda_2 \bar{F}_2(y_i, \theta_2); \theta))],$$

kde $\bar{F}_\cdot = 1 - F_\cdot$, $\lambda^{\parallel} = \mathfrak{C}(\lambda_1, \lambda_2; \theta)$ a $\lambda_i^\perp = \lambda_i - \lambda^{\parallel}$, parciální derivace:

$$c_1(u, v; \theta) = \left. \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{C}(x, y; \theta) \right|_{x=u, y=v}, \quad c_2(u, v; \theta) = \left. \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{C}(x, y; \theta) \right|_{x=u, y=v},$$

$$c_{12}(u, v; \theta) = \left. \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathfrak{C}(x, y; \theta) \right|_{x=u, y=v}.$$

logaritmus věrohodnostní funkce

$$I(\theta, \lambda_1, \lambda_2, \theta_1, \theta_2) = n_1 \log \lambda_1 + n_2 \log \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) T$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{i=1}^{n_1} \log f_1(x_i, \theta_1) + \sum_{i=1}^{n_1^\perp} \log (1 - c_1(\lambda_1 \bar{F}_1(\tilde{x}_i, \theta_1), \lambda_2; \theta)) \\ &+ \sum_{i=1}^{n_2} \log f_2(x_i, \theta_2) + \sum_{i=1}^{n_2^\perp} \log (1 - c_2(\lambda_1, \lambda_2 \bar{F}_2(\tilde{y}_i, \theta_2); \theta)) \\ &+ \mathfrak{C}(\lambda_1, \lambda_2; \theta) T + \sum_{i=1}^{n^{\parallel}} \log c_{12}(\lambda_1 \bar{F}_1(x_i, \theta_1), \lambda_2 \bar{F}_2(y_i, \theta_2); \theta). \end{aligned}$$

Složené Poissonovo rozdělení - odhad parametrů

Často je obtížné odhadnout společně všechny parametry, ať už je na vině velké množství dat, nebo složitost hustot složek, či složité vyjádření druhých derivací Lévyho kopulí.

Používá postup tzv. **IFM (Inference Functions for Margins)**.

Nejprve se odhadnou parametry $(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$ maximalizující:

$$I_j^*(\tilde{\lambda}_j, \tilde{\theta}_j) = n_j \log \tilde{\lambda}_j - \tilde{\lambda}_j T + \sum_{i=1}^{n_j} \log f_j(x_i, \tilde{\theta}_j), \quad j = 1, 2.$$

Potom se maximalizuje funkce $I(\theta, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, už jen jako funkce parametru θ Lévyho kopule.

Nahlédnutí do literatury

V článku [Esmaeli-Klüppelberg (2010)] byl tento postup aplikován na tzv. **Danish fire insurance data**. Data jsou volně přístupná v R-ku (knihovna *danish{SMPRACTICALS}*).

Jedná se o data posbítaná v letech 1980 až 1990 v Copenhangen Reinsurace, data byla upravena o inflaci na rok 1985. Každá pojistná událost je v datech dělena na ztrátu na **budově**, **inventáři** a **výdělku**.

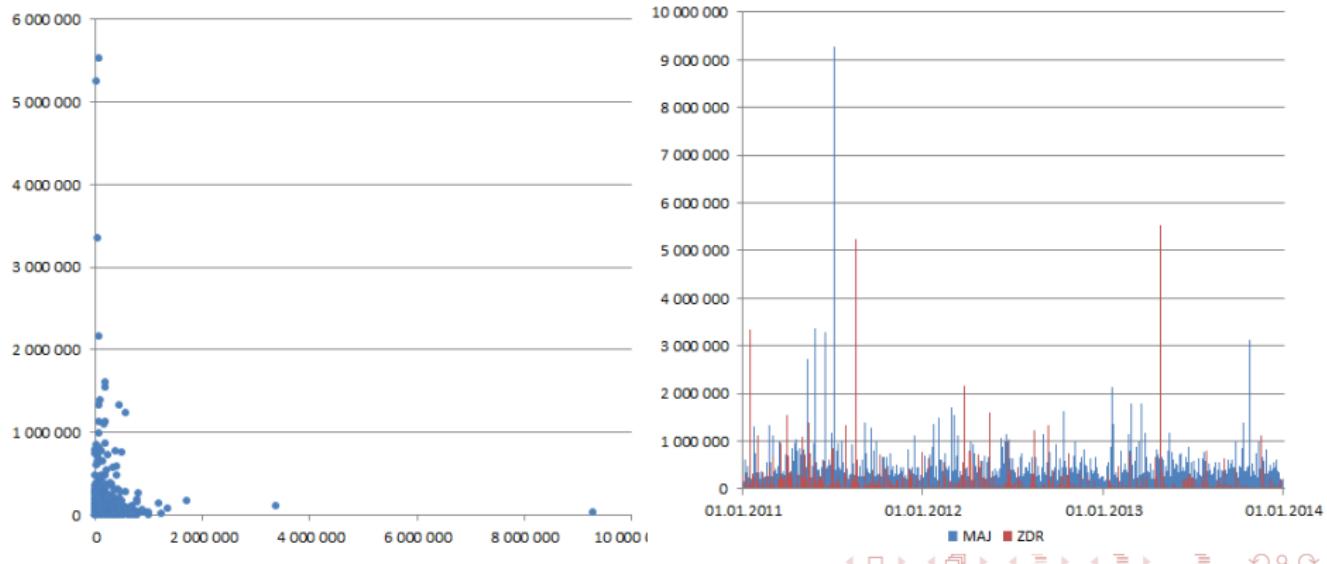
Autoři porovnávali **Lévyho-Claytonovu**, **Lévyho-BK** a **Lévyho-Frankovu** rodinu kopulí. Obdobná studie byla provedena v článku [Avanzi et. al (2011)] na data z pracovních kompenzací ze švýcarského institutu SUVA. Každá pojistná událost se dělí na **medical costs** a na **daily allowance cost**.

V článku [Esmaeli-Klüppelberg (2010)] datům lépe odpovídala Lévy-Tankovova kopule, zatímco v článku [Avanzi et. al (2011)] autoři vyhodnotili jako vhodnější kopuli Lévyho-Claytonovu.

Přístup jde zobecnit na stabilní procesy [Esmaeli-Klüppelberg (2011)].

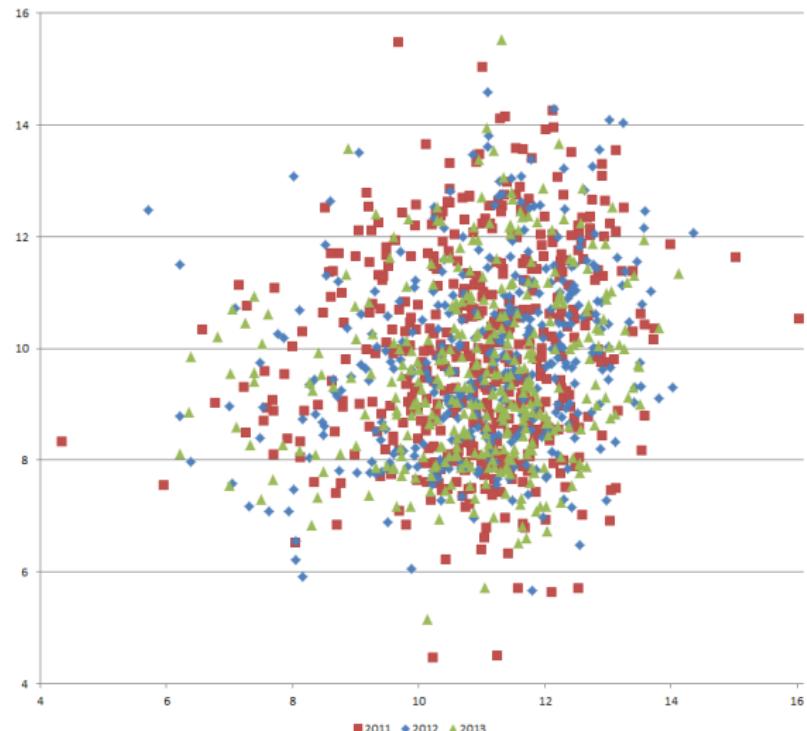
Data z povinného ručení

Do naší studie jsem vybral uzavřené škody z povinného ručení z jedné konkrétní tarifní skupiny z let 2011-2013. Inflace v těchto letech není až tak dramatická (1.4%, 3.3%, 1.9%), nicméně jsem o ní data očistil převedením do roku 2011.



Data z povinného ručení

Logaritmus škod



Data z povinného ručení

Souhrnné statistiky logaritmů škod:

	Zdraví	Majetek
mean	9.7293	9.7761
st.dev	1.7184	1.1125
skewness	0.2908	-0.3517
kurtosis	-0.2353	1.3951
median	9.5756	9.7657

Počty škod v jednotlivých třídách

	Majetek s výplatou	Majetek bez výplaty	Majetek celkem
Zdraví s výplatou	1 406	182	1 582
Zdraví bez výplaty	119 479	5 457	124 936
Zdraví celkem	120 885	5 639	126 524

tj. $\tilde{\lambda}_1 = 1\ 582$, $\tilde{\lambda}_2 = 120\ 885$ a $\tilde{\lambda}^{\parallel} = 1\ 406$.

MLE složek

Maximum logaritmu věrohodnostní funkce:

	Zdraví	Majetek
Normální	-2 475,3	-64 036,8
Log-normální	-2 293,6	-58 893,2
Gumbel	-2 119,6	-60 840,8
Weibull	-1 916,8	-62 290,3
Gamma	-1 986,9	-62 534,0
Pareto	-2 688,7	-63 801,9

Dejte si pozor, jaké daný program uvažuje hustoty!

- **Weibull** $\frac{c}{\sigma} \cdot \frac{y-\theta}{\sigma} \exp\left(\left(-\frac{y-\theta}{\sigma}\right)\right), y > \theta, c > 0.$
- **Log-normal**

$$\frac{1}{y-\theta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(y-\theta)-\zeta}{\sigma}\right)^2\right), y > \theta, \zeta \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

MLE složek

Majetek

Parameters for Lognormal Distribution		
Parameter	Symbol	Estimate
Threshold	Theta	-27852.8
Scale	Zeta	10.23504
Shape	Sigma	0.00004
Mean		9.776085
Std Dev		1.112537

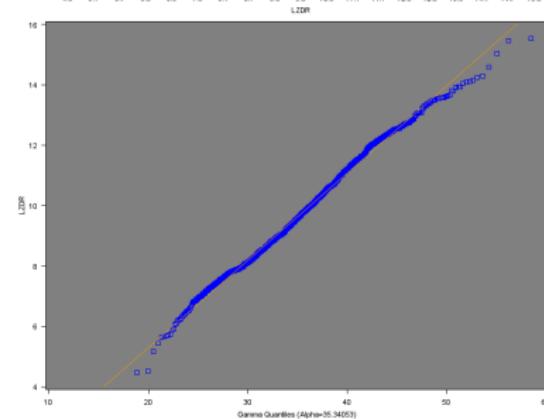
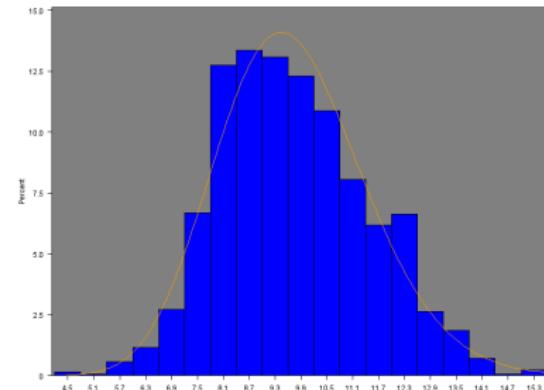
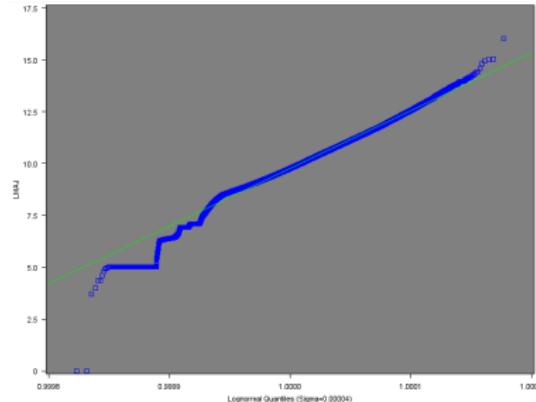
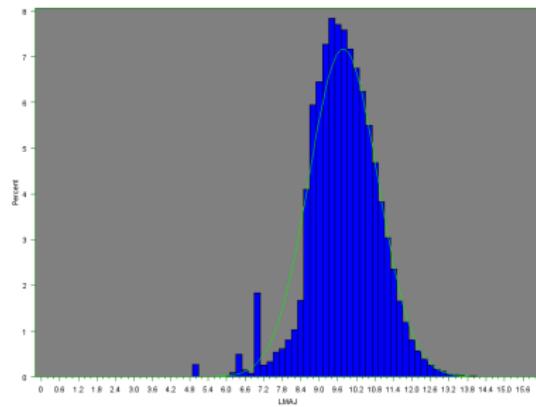
Quantiles for Lognormal Distribution		
Percent	Quantile	
	Observed	Estimated
1.0	6.61823	7.18804
5.0	7.98173	7.94616
10.0	8.60054	8.35033
25.0	9.10969	9.02568
50.0	9.76572	9.77606
75.0	10.49122	10.52647
90.0	11.14439	11.20187
95.0	11.53187	11.60608
99.0	12.34382	12.36433

Zdraví

Parameters for Weibull Distribution		
Parameter	Symbol	Estimate
Threshold	Theta	4.250271
Scale	Sigma	6.090249
Shape	C	3.452557
Mean		9.726014
Std Dev		1.754258

Quantiles for Weibull Distribution		
Percent	Quantile	
	Observed	Estimated
1.0	6.21060	5.85716
5.0	7.27170	6.82669
10.0	7.72621	7.42395
25.0	8.45744	8.49563
50.0	9.57564	9.72713
75.0	10.91272	10.94483
90.0	12.16280	12.00466
95.0	12.65981	12.61881
99.0	13.78790	13.72873

Odhad rozdělení složek



Metoda IFM

Lévyho kopule	maximum /	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\lambda}^{\parallel}$
Clayton	155 704, 5	110 034, 6	1 450, 4
AMH(log)	143 093, 3	140 122, 4	1 226, 0
AMH(frac)	157 434, 4	111 257, 1	1 605, 3
Tankov	153 620, 0	108 561, 5	1 801, 1
BK	150 029, 3	106 024, 0	1 409, 2

MLE ve všech složkách

Lévyho kopule	maximum /	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}^{\parallel}$
Clayton	161 821, 3	2, 758	1 499, 0	122 730, 1	1 339,2
AMH(log)	155 280, 3	-0,1839	2 004, 8	130 103, 2	1 650,8
AMH(frac)	162 944, 6	0,2071	1 598, 3	120 559, 5	1 432,8
Tankov	158 996, 7	0,00574	1 708, 7	118 277, 8	1 309,7
BK	160 458, 6	1,306	1 588, 6	123 443, 0	1 458,8

Lévyho kopule	$\hat{\theta}_W$	$\hat{\sigma}_W$	\hat{c}_W	$\hat{\theta}_{LN}$	$\hat{\sigma}_{LN}$	$\hat{\zeta}_{LN}$
Clayton	4, 186	6, 35	3, 89	-30 295	0, 00049	13, 42
AMH(log)	4, 387	5, 99	2, 50	-24 849	0, 00055	9, 39
AMH(frac)	4, 290	6, 18	4, 01	-29 022	0, 00048	11, 15
Tankov	4, 081	6, 82	3, 16	-28 627	0, 00035	12, 53
BK	4, 193	6, 39	3, 62	-31 004	0, 00055	14, 40

V naší studii zvítězila Lévyho-AMH(frac) kopule.

Závěry

Jak poznatky z dnešního semináře použít v praxi?

- Velké škody - přesnější odhad
- Rezervování - přesnější odhad IBNR
- Výpočet VaR/TVaR - přesnější výpočet pro vícerozměrná rozdělení (složený Poissonovo rozdělení)
- Ruinování - ztrátová funkce - vícerozměrný Lévyho proces
- Option pricing/ALM/Credit risk - Stochastická rovnice řízená vícerozměrným Lévyho procesem
- ...

Literatura

Lévyho procesy

-  Bertoin J. (1996) *Lévy processes*
Cambridge University Press, Cambridge.
-  Sato K.-I. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*
Cambridge University Press, Cambridge.
-  Schoutens W. (2003) *Lévy Processes in Finance*
John Wiley & Sons.
-  Cont R., Tankov P. (2004) *Financial Modelling With Jump Processes*
Chapman & Hall/CRC, London.

Kopule

-  Nelsen R. B. (1998) *An Introduction to Copulas*
Springer-Verlag.

Literatura

Lévyho kopule

-  Kallsen J., Tankov P. (2006) *Characterization of dependence of multivariate Lévy processes using Lévy copulas*
J. Multiv. Anal. 97, 1551-1572.
-  Barndorff-Nielsen O., Lindner A. (2007) *Lévy copulas: dynamics and transforms of Upsilon type*
Scand. J. Statistics 34, 298-316.
-  Bücher A., Vetter M. (2013) *Nonparametric inference on Lévy measures and copulas*
The Annals of Statistics, Vol. 41, No. 3, 1485–1515.

Aktuárské aplikace - Lévyho kopulí

-  Avanzi B., Cassar L. C., Wong B. (2011) *Modelling dependence in insurance claims processes with Lévy copulas*
ASTIN Bulletin 41(2), 575-609.

Literatura

-  Böcker K., Klüppelberg C. (2005) *Operational VaR: a closed-form approximation*
RISK Magazine, December, 90-93.
-  Böcker K., Klüppelberg C. (2008) *Modelling and measuring multivariate operational risk with Lévy copulas*
The Journal of Operational Risk 3(2), 3-27.
-  Böcker K., Klüppelberg C. (2009) *First order approximations to operational risk: Dependence and consequences*
Operational Risk Toward Basel III: Best Practices and Issues in Modeling, Management, and Regulation 219-245. Wiley, Hoboken, NJ.
-  Bregman Y., Klüppelberg C. (2005) *Ruin estimation in multivariate models with Clayton dependence structure*
Scand. Act. J. 2005(6), 462-480.

Literatura

-  Esmaeili H., Klüppelberg C. (2010) *Parameter estimation of a bivariate compound Poisson process*
Insurance: Mathematics and Economics 47(2), 224-233.
-  Esmaeli H., Klüppelberg C. (2011) *Parametric estimation of a bivariate stable Lévy process*
J. Multivariate Anal. 102 918–930.
-  van Velsen J. L. (2012) *Parameter estimation of a Levy copula of a discretely observed bivariate compound Poisson process with an application to operational risk modelling*
arXiv:1212.0092.

Děkuji za pozornost...